

● **محصلة قوتان متلاقيتان في نقطة.**

← **القوة:** مؤثر يؤثر على الجسم فيغير من حالته.

← **خصائص القوة:**

يتوقف تأثير القوة على عوامل ثلاثة

① مقدار القوة.

② اتجاه القوة.

③ نقطة تأثير القوة.

← **أنواع القوى:**

- قوة شد.

- قوة الضغط.

- قوة رد الفعل.

- قوى التناقل (الوزن).

← **وحدات قياس القوة:**

① وحدات تناقلية:

- ت. كجم

- ت. جم

- ت. طن

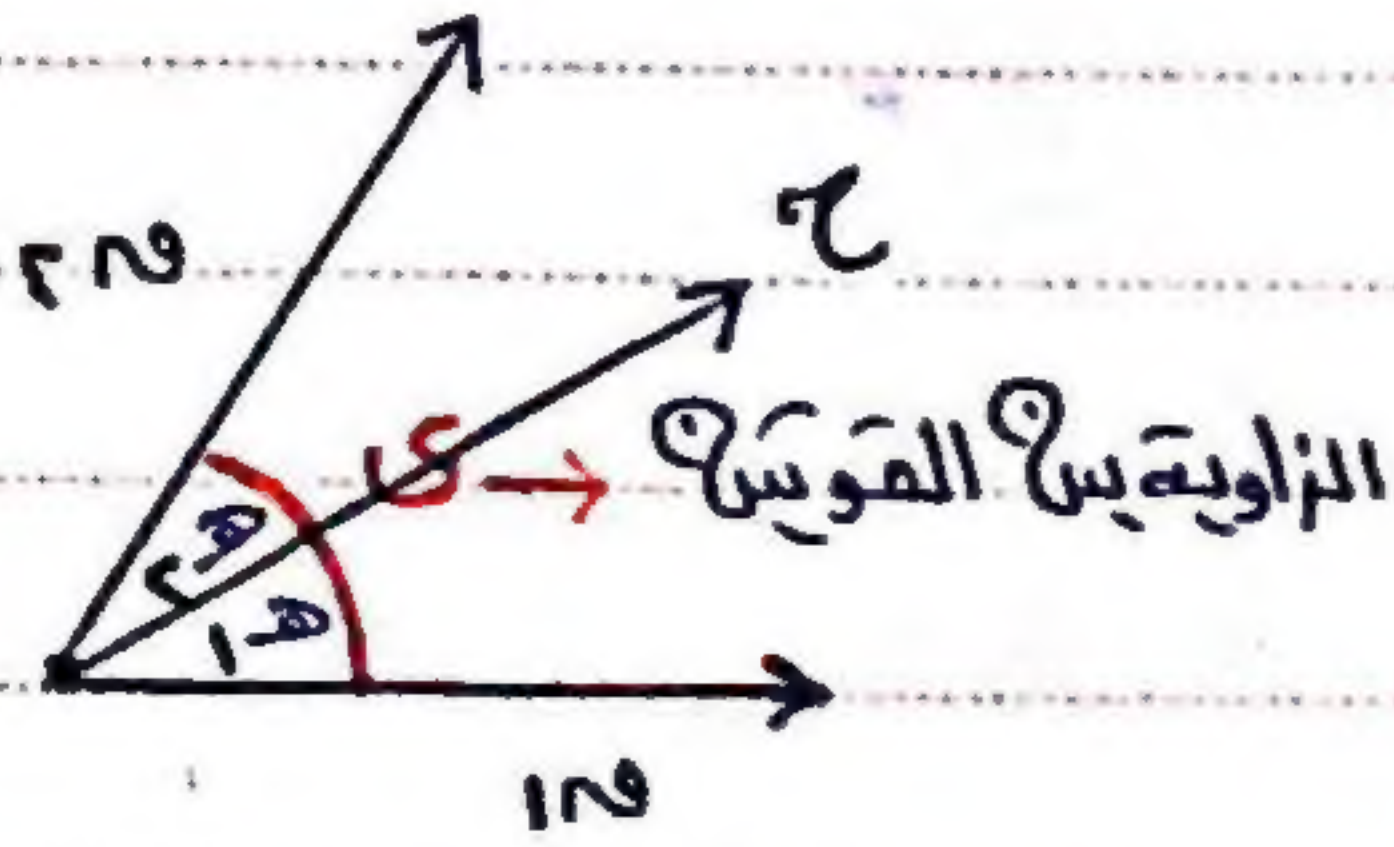
② وحدات مطلقة:

- نيوتن - دال

← **نيوتن = ١٠ دال** ، **ك. ات. جم = ١٠٨٠ دال**

ك. ات. كجم = ٩,٨ نيوتن

ندخل بقى في الجيب



■ **مقدار المحصلة:**

← $ح^2 = 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ$

← $ح = 1 + 4 + 2 = 7$

■ **اتجاه المحصلة:**

← **ظاهر =** $\frac{2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ}{1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ}$

● حيث هـ تمثل الزاوية بين المحصلة والقوة الأولى

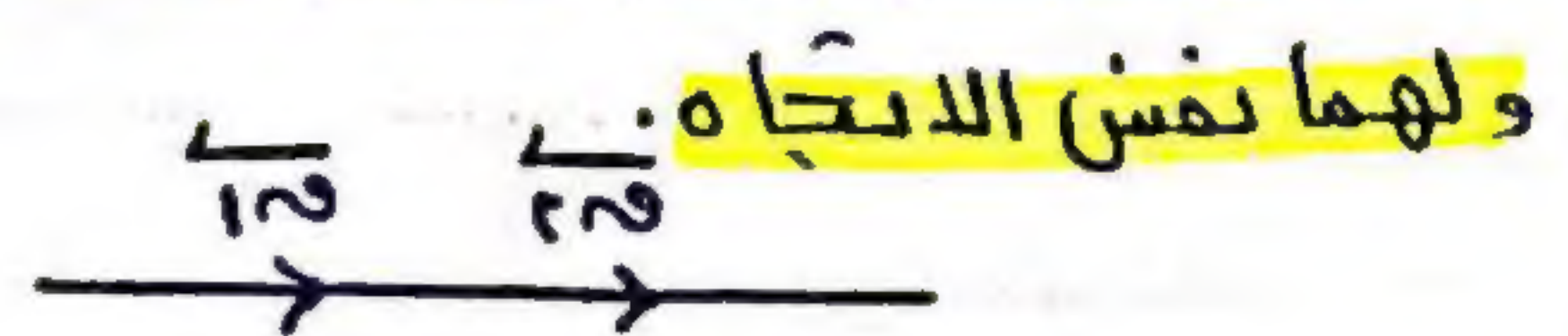
← **ظاهر =** $\frac{2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ}{1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ}$

● حيث هـ تمثل الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية

فاصل ونواصل
اعاد صلاح

← حالات خاصة:

① إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل

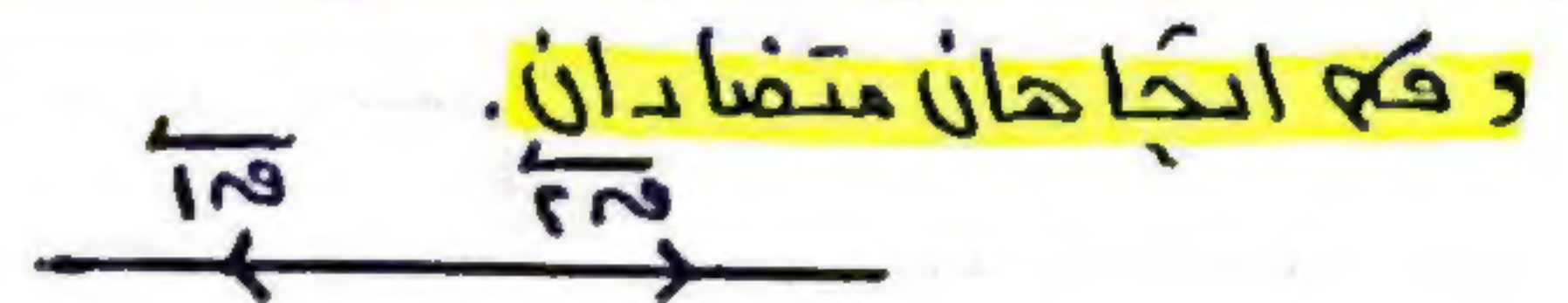


$$C = \text{مفر}$$

$$7 = 10 + 20$$

وتكون المحصلة قيمة عظمى

② إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل



$$C = 180^\circ$$

$$7 = |10 - 20|$$

وتكون المحصلة قيمة صفر

③ إذا كانت القوتان متساويتان في المقدار

$$7 = 20 \text{ جتا } \frac{C}{2}$$

$$1 = 20 = \frac{C}{2}$$

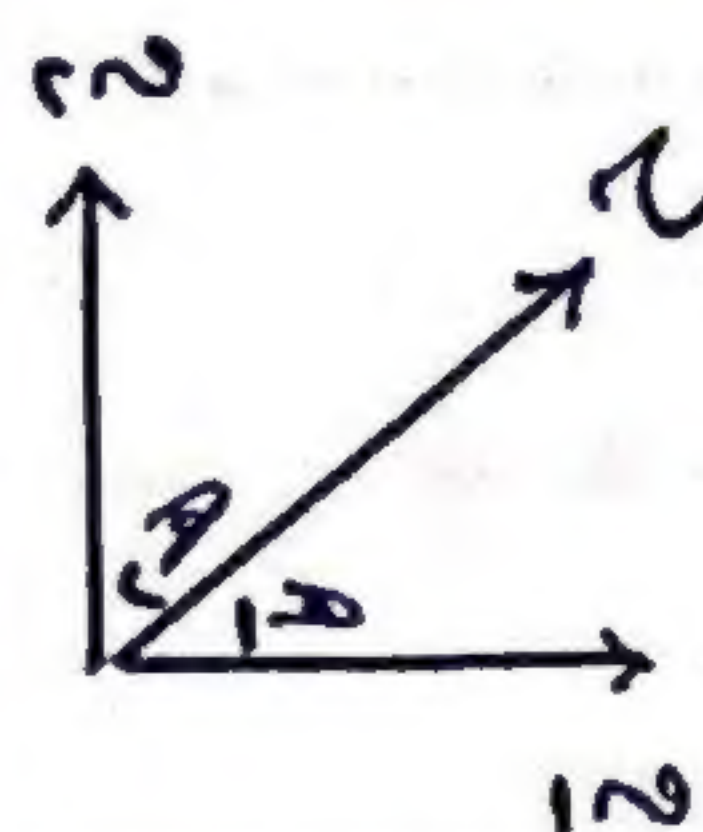
بمعنى المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

④ إذا كانت القوتان متعامدتان.

$$7 = 10^2 + 20^2$$

$$\text{ظاه} 1 = \frac{10}{2}$$

$$\text{ظاه} 2 = \frac{20}{2}$$



⑤ المحصلة تكون عمودية على القوة

الأصغر.

فإذا كانت: 10 ← هذه القوة الأصغر

$$7 = 10^2 - 20^2$$

$$\text{جتا } C = \frac{10}{20}$$

وإذا كانت: 20 ← هذه القوة الأصغر

$$7 = 20^2 - 10^2$$

$$\text{جتا } C = \frac{20}{10}$$

⑥ مهمة جداً جداً

$$7 \in [10 - 20, 10 + 20]$$

$$|10 - 20| \geq 7 \geq 10 + 20$$

⑦ إذا كانت القوتان متساويتان فلا

المقدار وكانت المحصلة تساوي أحدهما القوتين فإن (C = 120°)

⑧ 0 < C < 180° مهمة جداً

كل أملاككم مفتاح الحل
أعداد صلاح

مثال قوتان مقدارهما ٦ و ٩ نيوتن
وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° اوجد مقدار
المحصلة اذا كانت متجهين اوية ٤٥° على
٩ .

الحل

$$١٩ = ٦ \text{ نيوتن } ٩ = ٢٩$$

$$٤٥ = ٢ هـ ١٣٥ = ٢ هـ ٤٥$$

$$\frac{١٩ \text{ جـ اى}}{١٩ + ٢٩ \text{ جـ اى}}$$

$$\frac{١٣٥ \times ٦}{١٣٥ + ٩} = ٤٥ هـ$$

بالحاسبة يا فتي

$$٩ = ٦ \text{ نيوتن } ٢٧٦ = ٩$$

$$\frac{١٩ + ٢٩ + ١٩٢}{١٣٥ \text{ جـ اى}} = ٢$$

$$\frac{٢٧٦ + ٧٢ + ٣٦٧}{١٣٥ \text{ جـ اى}} =$$

$$٩ = ٦ \text{ نيوتن } \#$$

تمرين للطالب:

اوجد الزاوية بين القوتان ٣ و ٥ نيوتن
اذا كانت مقدار محصلتهما ٧ نيوتن .

$$(٩) = (٤٥) = ٦٠$$

**** تمارين محسولة ****

مثال قوتان ٥ و ٣ نيوتن تؤثران في
نقطة مادية والزاوية بينهما ٦٠° اوجد
مقدار واتجاه المحصلة .

الحل

$$١٩ = ٥ \text{ نيوتن } ٢٩ = ٣ \text{ نيوتن}$$

$$٦٠ = ٤$$

$$\frac{١٩ + ٢٩ + ١٩٢}{١٣٥ \text{ جـ اى}} = ٢$$

$$\frac{٢٠ + ٩ + ٢٥١}{٦٠ \text{ جـ اى}} =$$

$$٧ \text{ نيوتن } \#$$

$$\frac{٢٩ \text{ جـ اى}}{١٩ + ٢٩ \text{ جـ اى}} = ١ هـ$$

$$\frac{٣ \times ٦٠ \text{ جـ اى}}{٣ + ٥ \times ٦٠ \text{ جـ اى}} =$$

$$\text{shift} + \tan (\quad)$$

$$\therefore \text{هـ} = ٤٧' ٢١ \#$$

وهي زاوية ميل المحصلة على
القوة الاولى .

تمرين للطالب:

قوتان ٥ و ٧ نيوتن تؤثران في
نقطة مادية والزاوية بينهما ٩٠° اوجد
مقدار واتجاه المحصلة .

$$١ = ٧ \text{ نيوتن } ٢ = ٥ \text{ نيوتن } (٤٨' ٥٤)$$

تمرين للطالب:

قوتان مقدارهما ٣ و ٥ ن كجم تؤثران في نقطة مادية فإذا كان مقدار الزاوية بين القوتين 120° ومقدار محصلتهما $7\sqrt{3}$ ن كجم فأوجد مقدار θ .

مثال إذا كانت γ محصلة قوتين

حيث $\gamma \in [12, 22]$ فأوجد

القوتين ثم احسب المحصلة

إذا كانت الزاوية بينهم 60°

الحل

في حالة خاصة ومهمة جداً

$$18 - 18 < \gamma < 18 + 18$$

$$18 - 18 = 0 \leftarrow ①$$

$$18 + 18 = 36 \leftarrow ②$$

بالجسم

$$182 = 18 \quad \therefore 22 = 18 \text{ يوتن}$$

$$\text{عوض في المعادلة ② } 10 = 18 \text{ يوتن}$$

الآن بحسب المحصلة

$$\gamma = \sqrt{18^2 + 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$\text{عوض في المعادلة ② } 10 = 18 \text{ يوتن}$$

$$\therefore \gamma = 20.172 \text{ يوتن} \#$$

مثال قوتان متعامدتان مقدارهما

٦ و ٨ يوتن تؤثران في نقطة مادية

أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحل

نحلها بالك قانون القوتان متعامدتان

بمعنى حالة خاصة:

$$\gamma^2 = 6^2 + 8^2$$

$$62,5 = (6)^2 + (8)^2 =$$

$$\therefore \gamma = \sqrt{62,5} = 7,9 \text{ يوتن} \#$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{6}{8} \right) = 36,87^\circ$$

$$\text{shift } \tan \left(\frac{2.5}{6} \right)$$

$$\therefore \theta = 22,37^\circ \#$$

تمرين للطالب:

قوتان تؤثران في نقطة مادية فإذا كانت

أكبر قوتيهما ١٦ ن كجم وكانت

أصغر قوتيهما ٦ ن كجم فأوجد

مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار

محصلتهما إذا كانت الزاوية بين القوتين

ساوية 120° .

$$(18 = 11 \text{ ن كجم } 18 = 20 \text{ ن كجم } 26 = 17 \text{ ن كجم})$$

مثال إذا أثرت القوتان الثلاث المتساوية
مقاديرها $10\sqrt{2}$ نيوتن في نقطة
مادية وكان قياس الزاوية بين الأولى
والثانية 60° أوجد القيمة المطلقة
والصغرى لحاصلهم؟

الحل

الفكرة سهلة ذات محصلة القوتين
الأولى والثانية وأجبرهم قوة واحدة
ومما هم قوة ثالثة.

$$\sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \times 10 \times 10 \times \cos 60^\circ} = 10\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

■ القيمة المطلقة

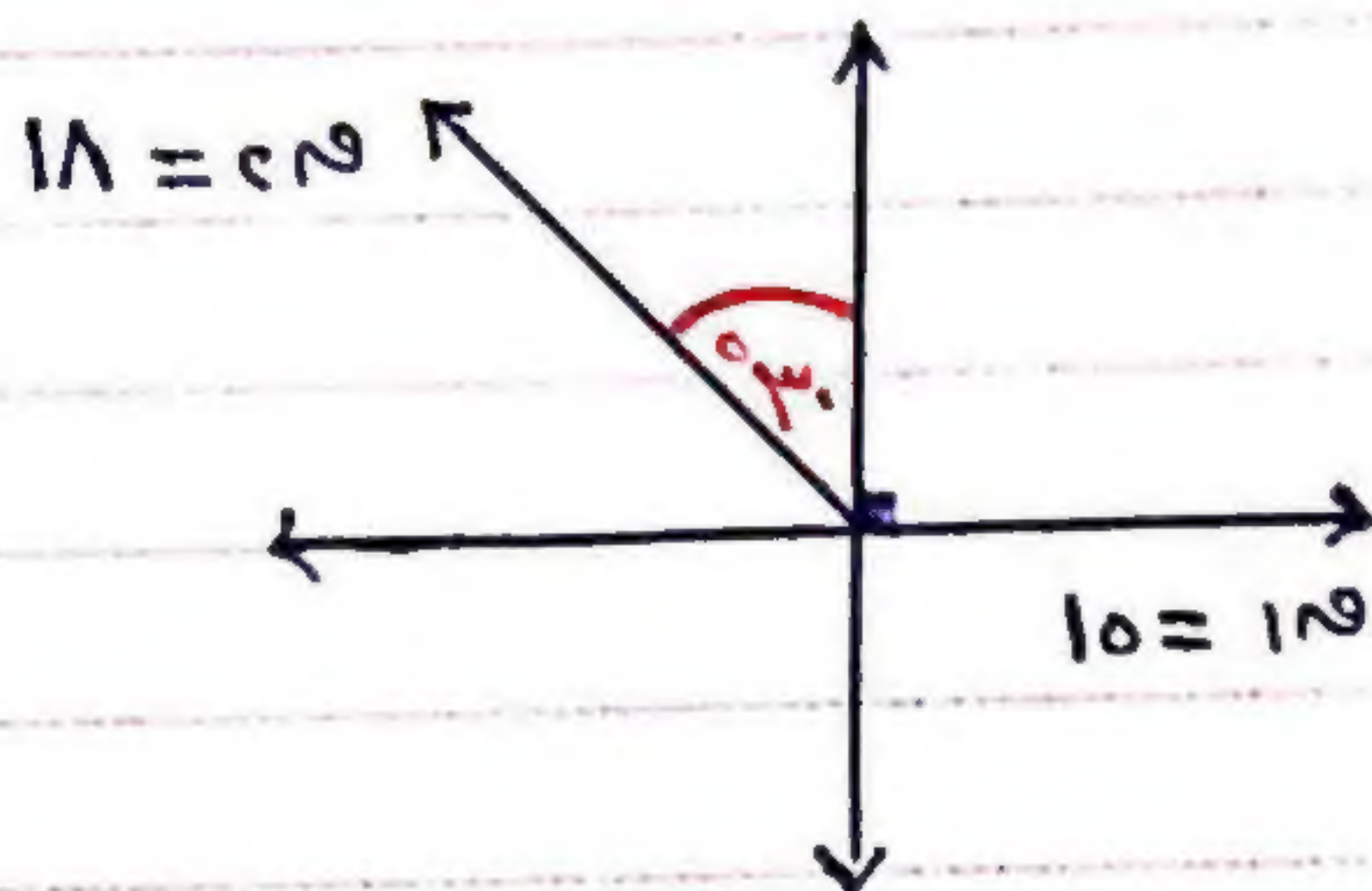
$$= \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \times 10 \times 10 \times \cos 60^\circ} = 10\sqrt{3}$$

■ القيمة الصغرى

$$= \sqrt{10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos 60^\circ} = 10$$

مثال أثرت قوتان في نقطة مادية
فإذا كان مقدار القوة الأولى 10 كجم
وتؤثر في اتجاه الشرق ومقدار الثانية
 18 كجم وتؤثر في اتجاه 30° غرب
السمت أوجد مقدار واتجاه المحصلة؟

الحل



$$= \sqrt{10^2 + 18^2 + 2 \times 10 \times 18 \times \cos 120^\circ} = 10\sqrt{3}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

$$= \sqrt{10^2 + 18^2 + 2 \times 10 \times 18 \times \cos 120^\circ} = 10\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{10^2 + 18^2 - 2 \times 10 \times 18 \times \cos 60^\circ} = 10$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

د. المحصلة يسأل على القوة الأولى
بزاوية قياسها

$$\begin{aligned}
 7 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 &= 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 &= 1700 \\
 \therefore 7 &= 1700 = 1700 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

مثال قوتان مقدارهما ٢٠٠ و ٣٠٠ نيوتن
أوجد قياس الزاوية بين القوتين إذا كان
مقدار محصلتهما ٢٠٠ نيوتن.

الحل

$$\begin{aligned}
 100 &= 100 \quad 200 = 200 \quad 300 = 300 \quad 7 = 7 \\
 7 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 7 &= 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 7 &= 1700 \\
 1700 &= 1700 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

مثال قوتان متعامدتان تؤثران في نقطة
هادية أحدهما يساوي $\frac{2}{3}$ مقدار الآخر
ومقدار محصلتهما يساوي ١٣٦٥ نيوتن
أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

$$\begin{aligned}
 &= \text{القوتان متعامدتان} \\
 7 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 7 &= 1700 \\
 1700 &= 1700 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 7 &= 1700 \\
 1700 &= 1700 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

مثال قوتان مقدارهما ٥٠ و ١٠٠ نيوتن
أوجد مقدار محصلتهما إذا كانت المحصلة
عمودية على القوة الأولى؟

الحل

$$\begin{aligned}
 &= \text{المحصلة عمودية على القوة الأولى} \\
 100 &+ 50 = 150 \text{ نيوتن} \\
 100 &+ 50 = 150 \text{ نيوتن} \\
 150 &= 150 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

مثال قوتان مقدارهما ٢٠٠ و ٣٠٠ نيوتن وقياس
الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار محصلتهما
في نيوتن وأوجد زاوية ميلهما على القوة الأولى

الحل

$$\begin{aligned}
 7 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\
 7 &= 1700 \\
 1700 &= 1700 \text{ نيوتن} \#
 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \quad \#$$

مثال قوتان مقدارهما 2 ن و 2 ن ومقدار
المحصلة لهما $= 5\text{ ن}$ فان قياس الزاوية
بينهما $\dots\dots\dots$

١. ٠ ٢. 90° ٣. 120° ٤. 180°

الحل

$$2 = 2 + 2 \quad \therefore \theta = 0^\circ$$

$$\bullet \text{ ظاهر} = \frac{2\text{ ن} \cos \theta}{2\text{ ن} + 2\text{ ن}}$$

$$= \frac{2\text{ ن} \cos 135^\circ}{2\text{ ن} + 2\text{ ن}}$$

$$= \frac{2}{2} \quad \text{غير معروف}$$

$\therefore \theta = 90^\circ$ أي أن المحصلة
عودية على القوة الأولى $\#$

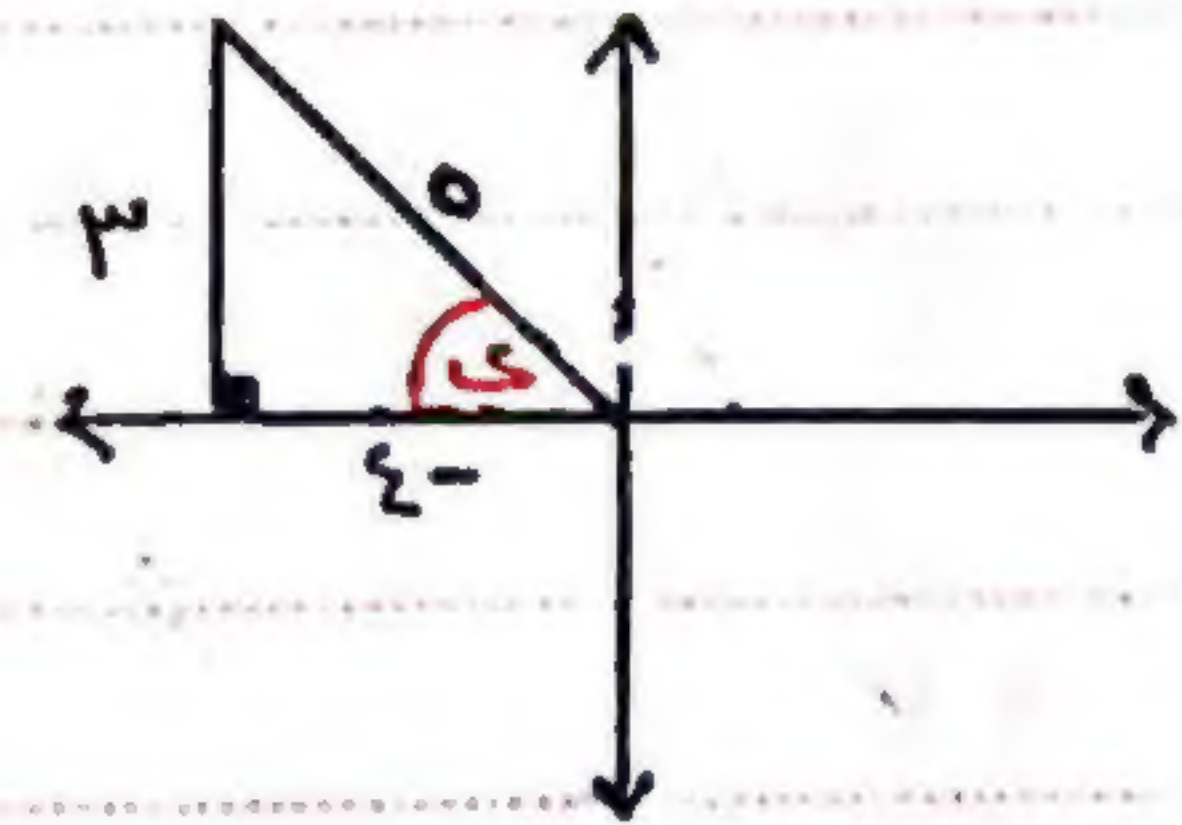
مثال قوتان مقدارهما 2 ن و 5 ن ومقدار
المحصلة 3 ن فان قياس الزاوية بينهما
١. ٠ ٢. 90° ٣. 180° ٤. 120°

الحل

$$3 = 2 - 5 \quad \therefore \theta = 180^\circ$$

مثال قوتان مقدارهما 12 ن و 15 ن وتكون
توترات في نقطة مادية وتكون الزاوية
بينهما $\frac{3}{4}$ اوجد المحصلة وقياس
زاوية ميلها على القوة الأولى ؟

الحل



$$\bullet \text{ } 3 = 12 + 15 + 12 \cos \theta$$

$$= 12 + 15 + 12 \times \frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

مثال قوتان متساويتان ومتلافتتان في نقطة
مقدار كل منهما 7 ن ومقدار المحصلة
 7 ن فان قياس الزاوية بينهما $\dots\dots\dots$

١. 30° ٢. 120° ٣. 150° ٤. 60°

الحل

القوتان متساويتان والمحصلة تساوي

أحد القوتين فان $\theta = 120^\circ \quad \#$

$$\bullet \text{ ظاهر} = \frac{2\text{ ن} \cos \theta}{2\text{ ن} + 2\text{ ن}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 10}{\frac{3}{4} \times 10 + 12}$$

مثال قوتان قياس الزاوية بينهما θ فان
مقدار محصلتهما
 (أ) يزداد بزيادة θ
 (ب) يتناقص بنقص θ
 (ج) يزداد بنقص θ
 (د) لا يتغير بتغير θ

الحل

مثلاً:

$$70^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 2 \times 50^\circ + 3 \times 30^\circ + 60^\circ$$

$$70^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 2 \times 50^\circ + 3 \times 30^\circ + 30^\circ$$

هنا $70^\circ < 90^\circ$

خلاص كد خلاص #

مثال قوتان متساويتان في نقطة مقدارهما $2\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ حيث $0 < \theta < \pi$ وكان $0 < \theta < \pi$ فان المحصلة تكون.....
 الحل

الحل

$$\pi > \theta > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{عند } \theta = 0 \end{array} \right)$$

$$17 < 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} < 18$$

$$17 < 2 < 18$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{عند } \theta = \pi \end{array} \right)$$

$$5 + 12 < 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} < 14 + 5$$

$$169 < 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} < 181$$

$$169 < 2 < 181$$

$$13 < 2 < 17$$

مثال قوتان مقدارهما $3\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ وقياس الزاوية بينهما 120° اذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الاولى فان $\theta = \dots\dots\dots$

الحل

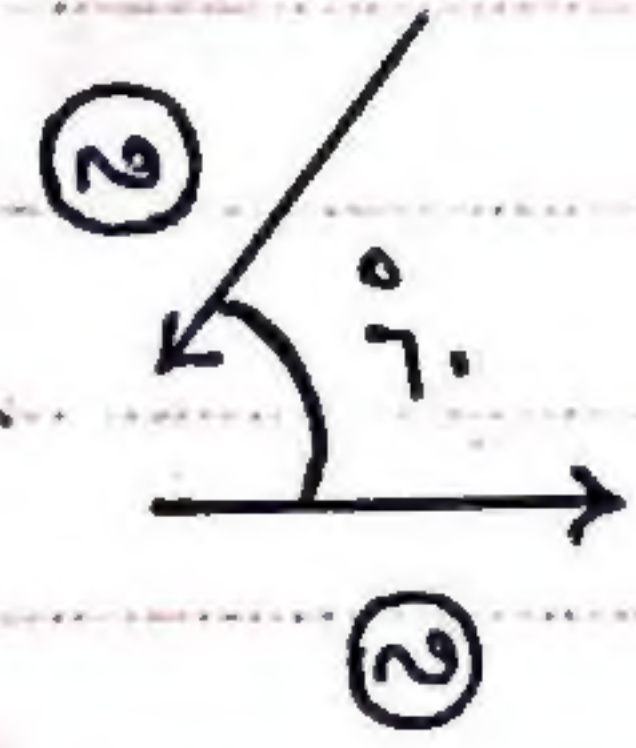
المحصلة عمودية على $3\sqrt{2}$

$$\therefore \text{جاء } \frac{120}{2} = \frac{120}{2}$$

$$\text{جاء } 120^\circ = \frac{120}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \text{ بيوتن } \#$$

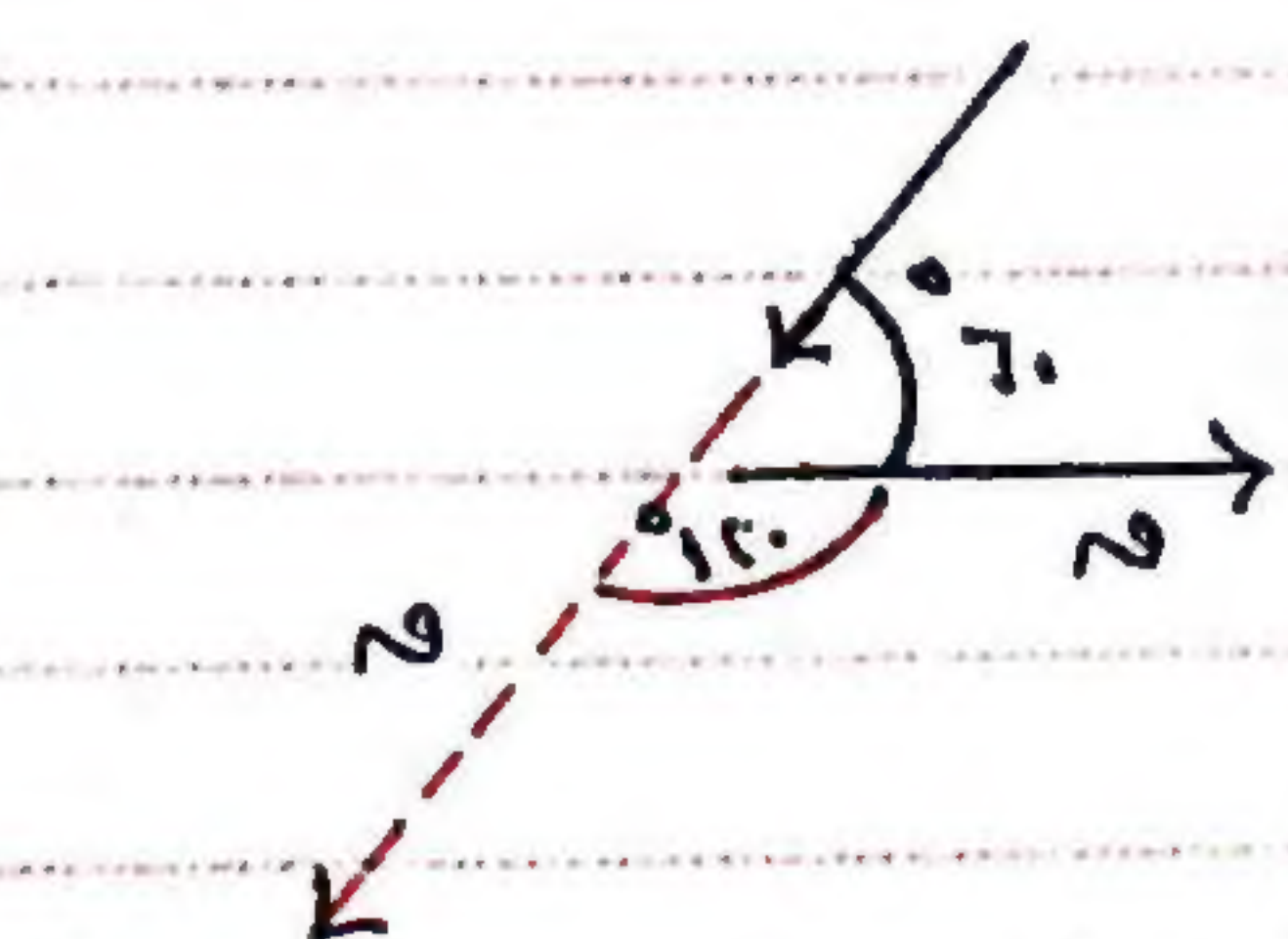
مثال مقدار محصلة القوس في الشكل المقابل =



$$\text{(أ) } \frac{1}{2} \text{ و (ب) } 30$$

$$\text{(ج) } 3\sqrt{2} \text{ و (د) } 5\sqrt{2}$$

الحل



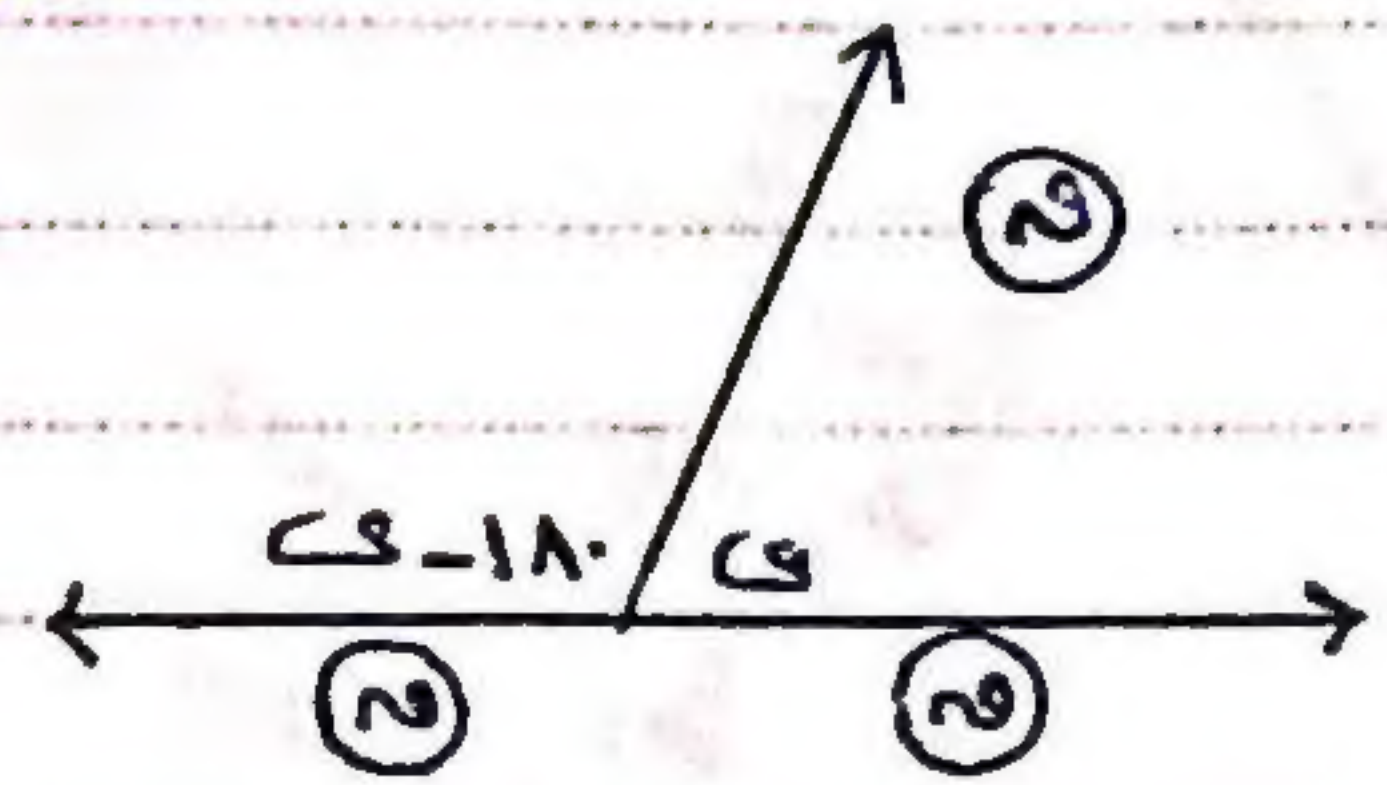
القوتان متساويتان الزاوية بينهما 120°

$$\therefore \text{احد القوسين } = 3\sqrt{2} \text{ و } \#$$

مثال قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما = ١٢ ث. كجم وإذا عكس اتجاه أحدهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث. كجم أوجد مقدار كل من القوتين ؟

الحل

مثال مهم جداً



$$F_1 + F_2 + F_3 = 12$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 12$$

$$F_1 + F_2 = 144$$

$$F_1 + F_2 = 72 \quad \text{--- (1)}$$

عكس اتجاه أحد القوتين :

$$F_1 + F_2 + F_3 = 12$$

$$F_1 + F_2 = 36$$

$$F_1 - F_2 = 18 \quad \text{--- (2)}$$

بجمع المعادلتان (1) و (2)

$$2F_1 = 90 \quad \rightarrow F_1 = 45$$

$$F_2 = 36 - F_1 = 36 - 45 = -9 \quad \text{كجم} \quad \#$$

هناك حل آخر :

القوتان متساويتان (من الملاحظات)

$$F_1 = F_2 = 7 \quad \text{جناح} \quad \text{كل بقى الخطوات}$$

مثال قوتان متساويتان في المقدار في قياس الزاوية بينهما ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت المحصلة بمقدار ١١ ث. كجم عن الحالة الأولى أوجد مقدار F ؟

الحل

$$F_1 = F_2 = F \quad \text{ك} \quad 120^\circ$$

من الملاحظات طبعاً : $F_1 = F_2 = 120^\circ$

$$F_1 = F_2 = 7 \quad \text{جناح}$$

$$F_1 = F_2 = 7 \quad \text{جناح}$$

$$F_1 = F_2 = 7 \quad \text{جناح} \quad \text{--- (1)}$$

تضاعفت القوتان : $F_1 = F_2 = 120^\circ$

$$F_1 = F_2 = 60^\circ$$

$$F_1 = F_2 = 7 \quad \text{جناح}$$

$$F_1 = F_2 = 30 \quad \text{جناح} \quad \text{--- (2)}$$

$$F_1 = F_2 = 36 \quad \text{جناح} \quad \text{--- (3)}$$

زادت المحصلة بمقدار ١١

$$F_1 = F_2 = 11$$

$$F_1 = F_2 = 11$$

$$F_1 = F_2 = 11$$

$$F_1 = F_2 = 11$$

$$F_1 = F_2 = 11 \quad \text{جناح} \quad \text{--- (4)}$$

$$F_1 = F_2 = 11 \quad \text{جناح} \quad \text{--- (5)}$$

(مثال) قوتان مقدارهما ۸۶۶ نیوتن فان

المحصلة ممكن ان تكون:

المحملة تنصف كل اربعة بنى القوس

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

فان $\infty = \dots$ - اینج.

الحل

الحل

$$[n_2 + 1, n_5, n_2 - 1] \in \mathcal{T}$$

المحصلة تصف الراوية بين القوتين

[18 5 7 31] ∈

$\therefore 2 = 9 \therefore 22 = 12$

$$\{111, 591, 171, 750, 729, 352\} =$$

{ 125 135 155

دوا علی رقم موجود فی الاختیارات

من ههلا فاه عن ۱۲

مثال قوتان متعامدان مقدارهما (۵-۴)

٢ (٢+٣) ومقلد / محصلها ٥٧٣ فان

فَمِمَّا فِيهِ مُنَاوَلَاتٌ مُّشْتَبِهَاتٌ مَّمَّنَّ اللَّهُ بِأَنَّ فِيهَا مَاءٌ كَرِيمٌ

الحل

$$\therefore m \perp n \because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$
$$S(12+2) + S(0-22) = S(\overline{064})$$
$$3 + 23 + 5 + 50 + 25 - 28 = 80$$
$$\therefore = 17 - 2 \times 17 - 9 \times 20 \therefore$$
$$= (2-20)(2+20)$$

#... ۴ = ۲۰ ... سوختن

مثال إذا كانت النسبة بين القيمة المقطوعة

والقيمة الصغرى λ لحصلة قوسين ١:٤

فإن السبيل بين القوسين

$5:3 \text{ (L)}$ $1:3 \text{ (A)}$ $3:0 \text{ (U)}$ $1:3 \text{ (P)}$

الحل

$$\frac{z}{1} = \frac{cn + 1n}{cn - 1n}$$

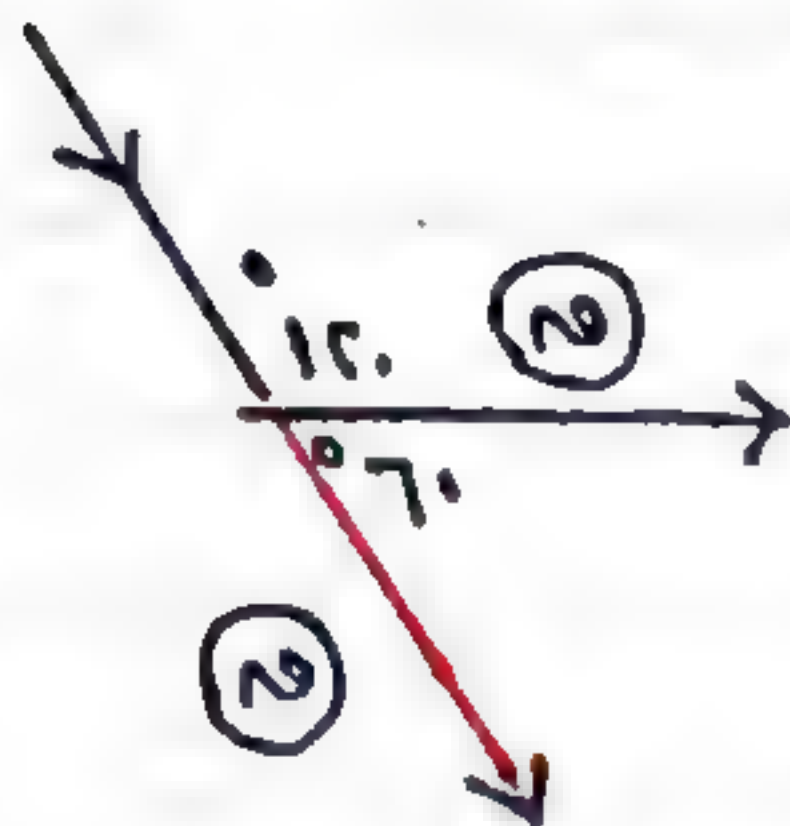
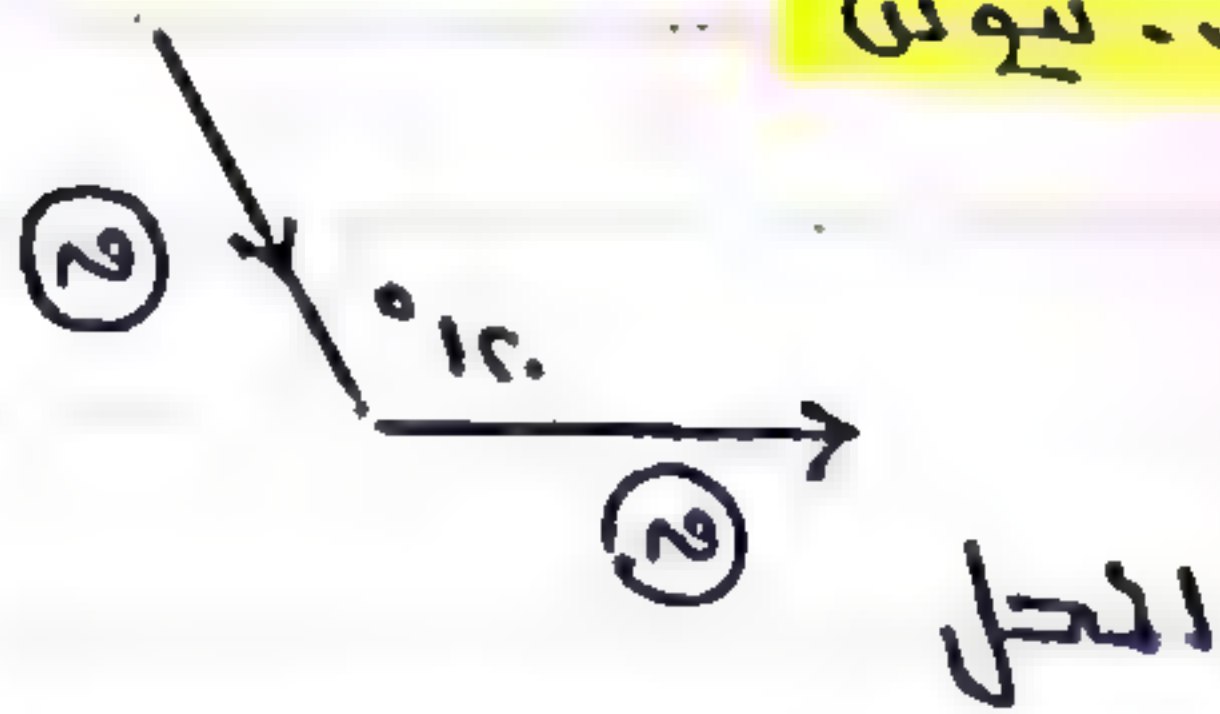
$$c2z - 12z = c2 + 12$$

$$120 - 123 = 723 + 72$$

$$120^\circ = 220$$

$$F: 0 = 29: 12 \therefore$$

مثال قوتان متساويتان في المقدار ومقدار
محصلتهما 17 نيوتن عندما كان قياس الزاوية
بينهما $\frac{\pi}{3}$ فان القيمة المطلقة لمحصليهما
تساوي نيوتن



$$7 = 2 \cos \frac{\pi}{3} \quad (\text{لأن } 1 \cos = 1 \cos)$$

$$7 = 2 \cos \frac{\pi}{3} \times 2 = 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$7 = 4 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{7}{4}$$

مثال قوتان متساويتان في المقدار ومقدار
محصلتهما 17 نيوتن عندما كان قياس الزاوية
بينهما $\frac{\pi}{3}$ فان القيمة المطلقة لمحصليهما
تساوي نيوتن

الحل

$$17 = 2 \cos \frac{\pi}{3} \times 2 = 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$17 = 4 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{17}{4}$$

$$17 = 4 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{17}{4}$$

$$17 \times 17 = 16 \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

$$17 \times 17 = 16 \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

$$17 \times 17 = 16 \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

القيمة المطلقة للمحصلة

$$17 + 17 = 2 \cos \frac{\pi}{3} \times 2 = 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$17 + 17 = 4 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{17}{4}$$

مثال اذا بلغت المحصلة بين قوتين قيمة
عظمى فان قياس الزاوية =

$$90^\circ \quad \text{ب} \quad 180^\circ \quad \text{د}$$

$$0^\circ \quad \text{ج} \quad 180^\circ \quad \text{د}$$

مثال قوتان مقدارهما 1 و 2 نيوتن
حيث $1 < 2$ ومقدار محصلتهما 3 حيث
 $\theta \in [125.3]$ فان $1 \cos - 2 \cos = \dots$ نيوتن

الحل

$$12 = 1 \cos + 2 \cos \quad 3 = 1 \cos - 2 \cos$$

$$12 = 1 \cos + 2 \cos \quad 3 = 1 \cos - 2 \cos$$

$$12 = 1 \cos + 2 \cos \quad 3 = 1 \cos - 2 \cos$$

مثال اذا كانت \vec{a} محصلة \vec{a} و \vec{b} وكانت

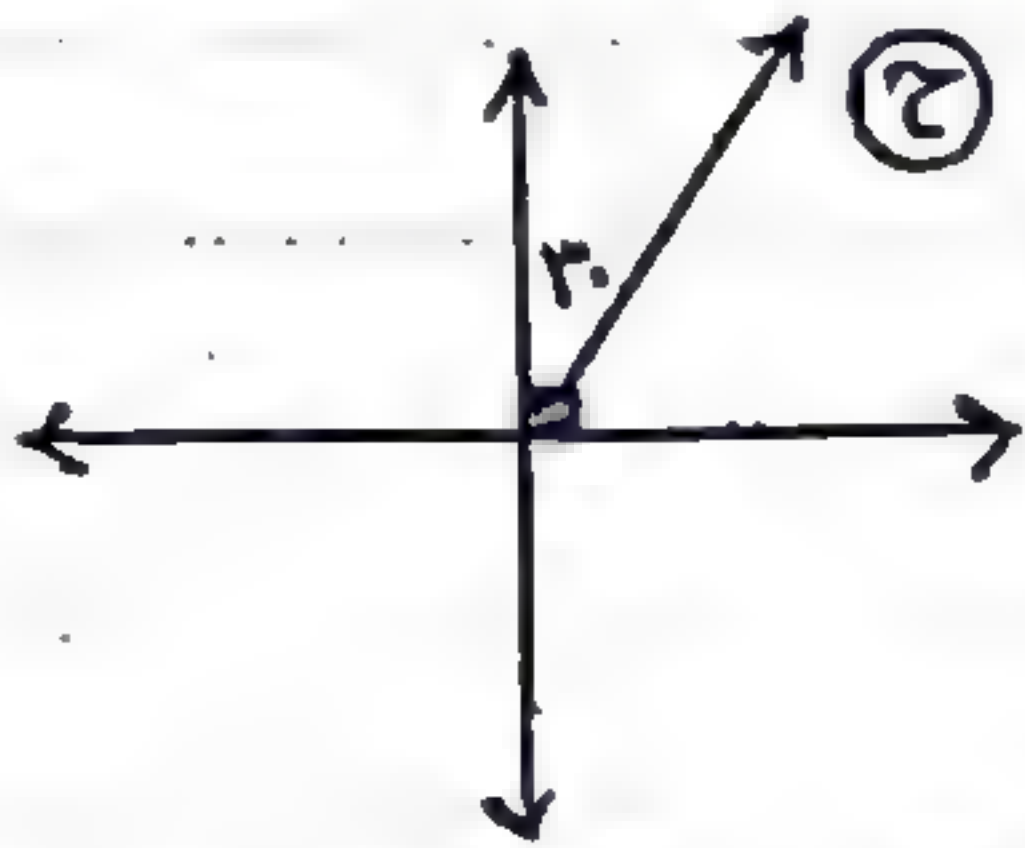
\vec{a} محصلة \vec{a} و \vec{b} وكانت $\vec{a} = \vec{b}$ فان

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{ب} \quad \vec{a} = \vec{b} \quad \text{د}$$

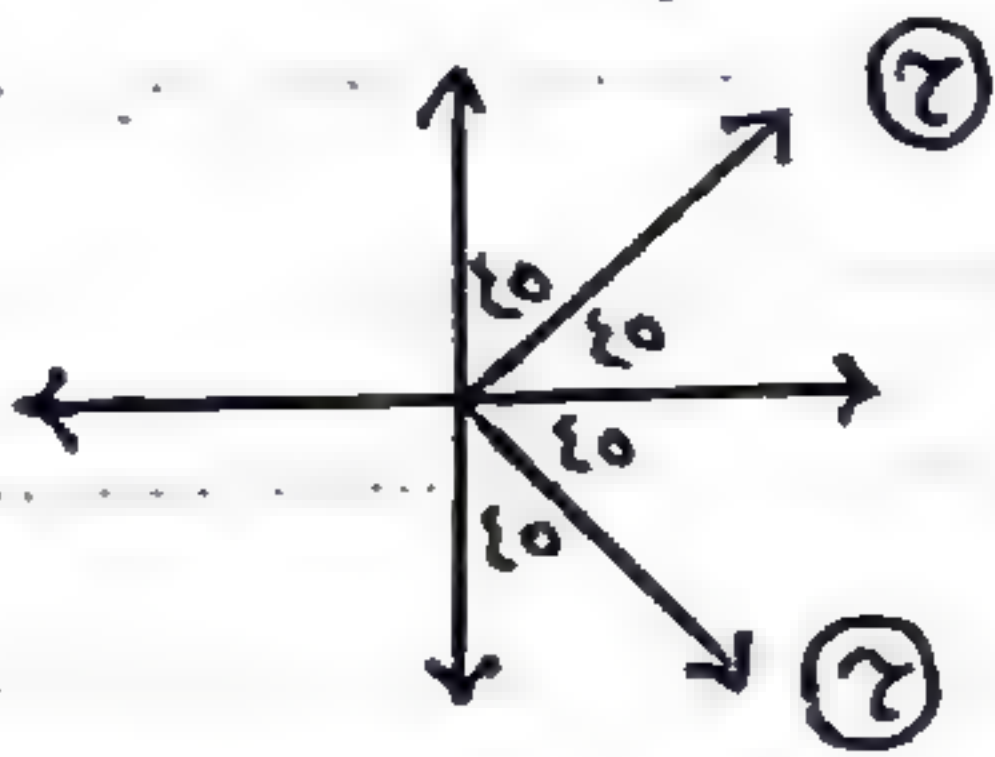
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \text{ج} \quad \vec{a} = \vec{b} \quad \text{د}$$

• ملاحظات هامة

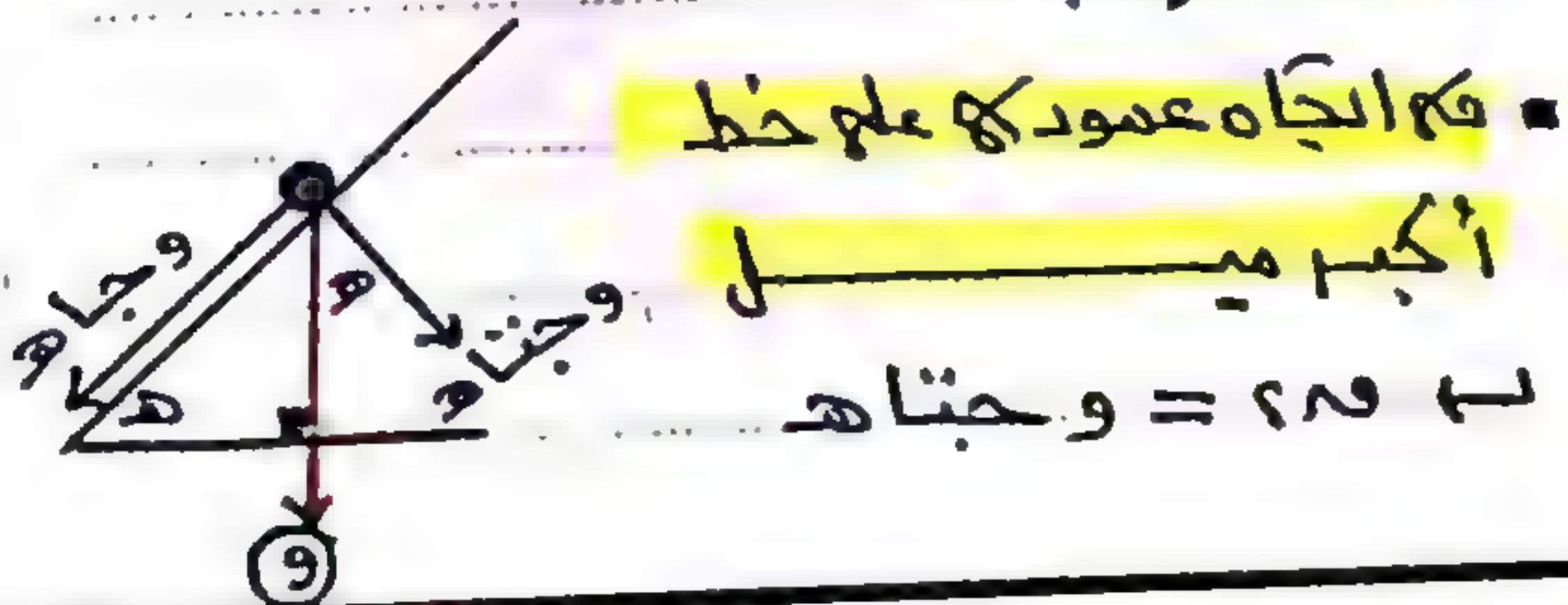
لو قال احضرتك حلل قوة ح. تفصل
فخ اتجاه مثلاً ٣٠° شرق الشمال الزاوية
يا معلم خطها جهة الشمال ثم تحت
الزاوية مع اللمعة الثانية اللمعة الاولى



لو قال احضرتك حلل قوة ح تفصل
فخ اتجاه شرق الشمال أو الجنوب
الشرق أو الجنوب اتجاهين مع بعض و لم
يحدد الزاوية ارسم القوة مع المتوسط



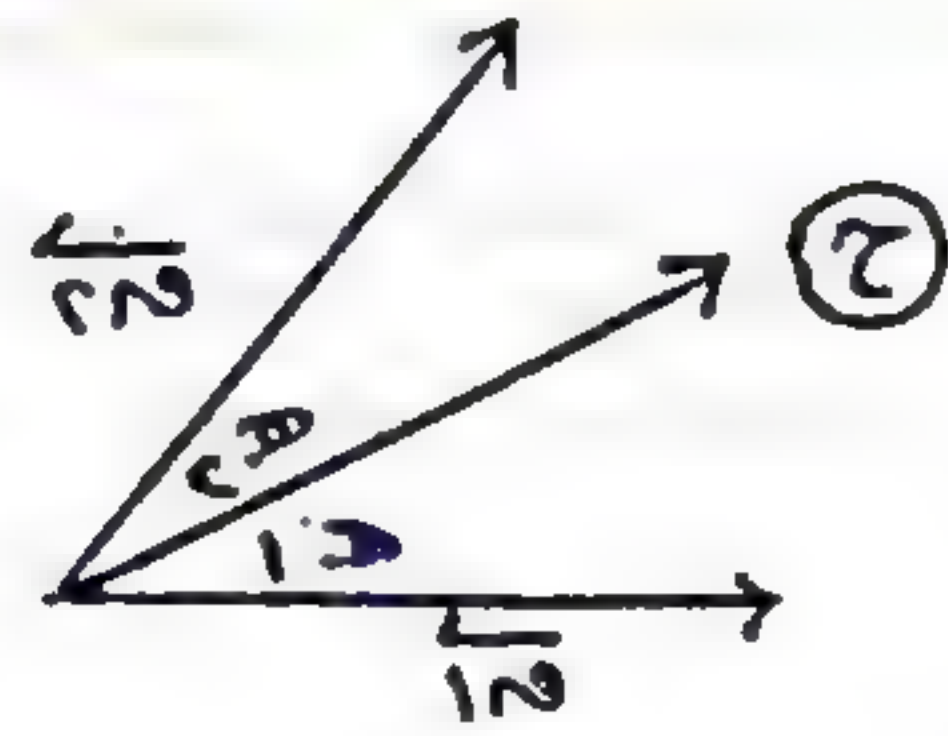
اذا وضع جسم على مستوى مائل فان الوزن
(و) يؤثر رأسياً للأسفل ويكون له مركبتان
فخ اتجاه خط أكبر ميل للأسفل
ب. ١٨ = و جها



فخ اتجاه عمودي على خط
أكبر ميل
ب. ٢٨ = و جها

⑤ تحليل القوى:

⑥ فخر اتجاهين معلومين:



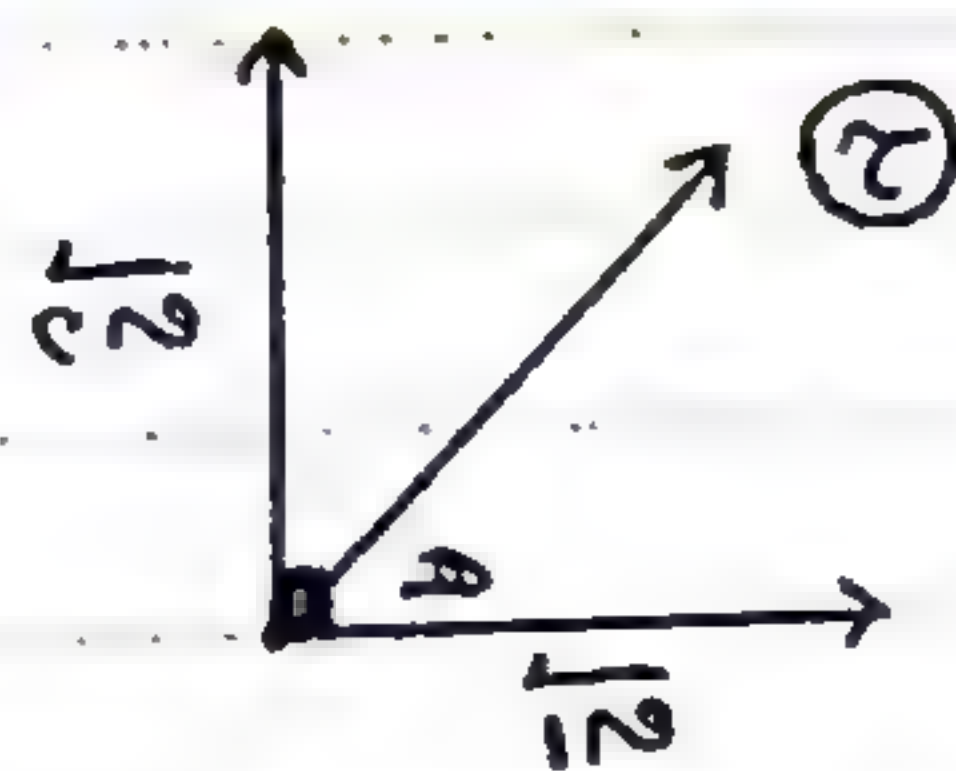
$$\frac{ح}{ج (١٨ + ٢٨)} = \frac{٢٨}{١٨} = \frac{١٨}{٢٨}$$

نصوات اخذ:

$$\frac{٢٨}{ج (١٨ + ٢٨)} = ١٨$$

$$\frac{٢٨}{ج (١٨ + ٢٨)} = ٢٨$$

⑦ فخر اتجاهين متعامدين:



$$١٨ = ح جها$$

$$٢٨ = ح جها$$

متناسق مطروح ما الزاوية تمام اديها
جيب تمام (جنا)

اعداد الاستاذ / عماد صلاح

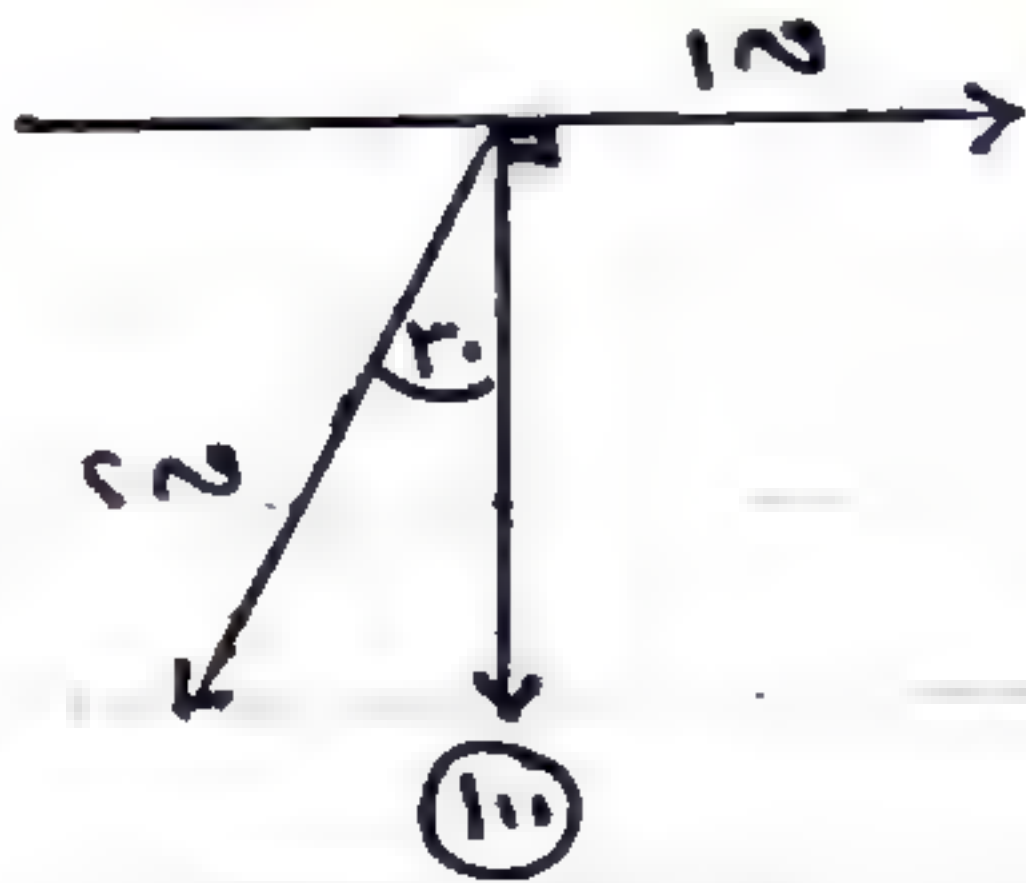
01030252232

معلم الرياضيات والاحصاء

$$\bullet \quad ٢٨ = \frac{٢٠ \text{ جا } ٣٠}{(٢٥ + ٣٠)} = ١٠,٣٥ \text{ نيوتن}$$

مثال حل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن تؤثر رأسياً للأسفل على مركبتين في اتجاهين مختلفتين أحدهما أفقية والآخر ٤٠° يميل عليها بزواوية قياسها ٣٠°؟

الحل

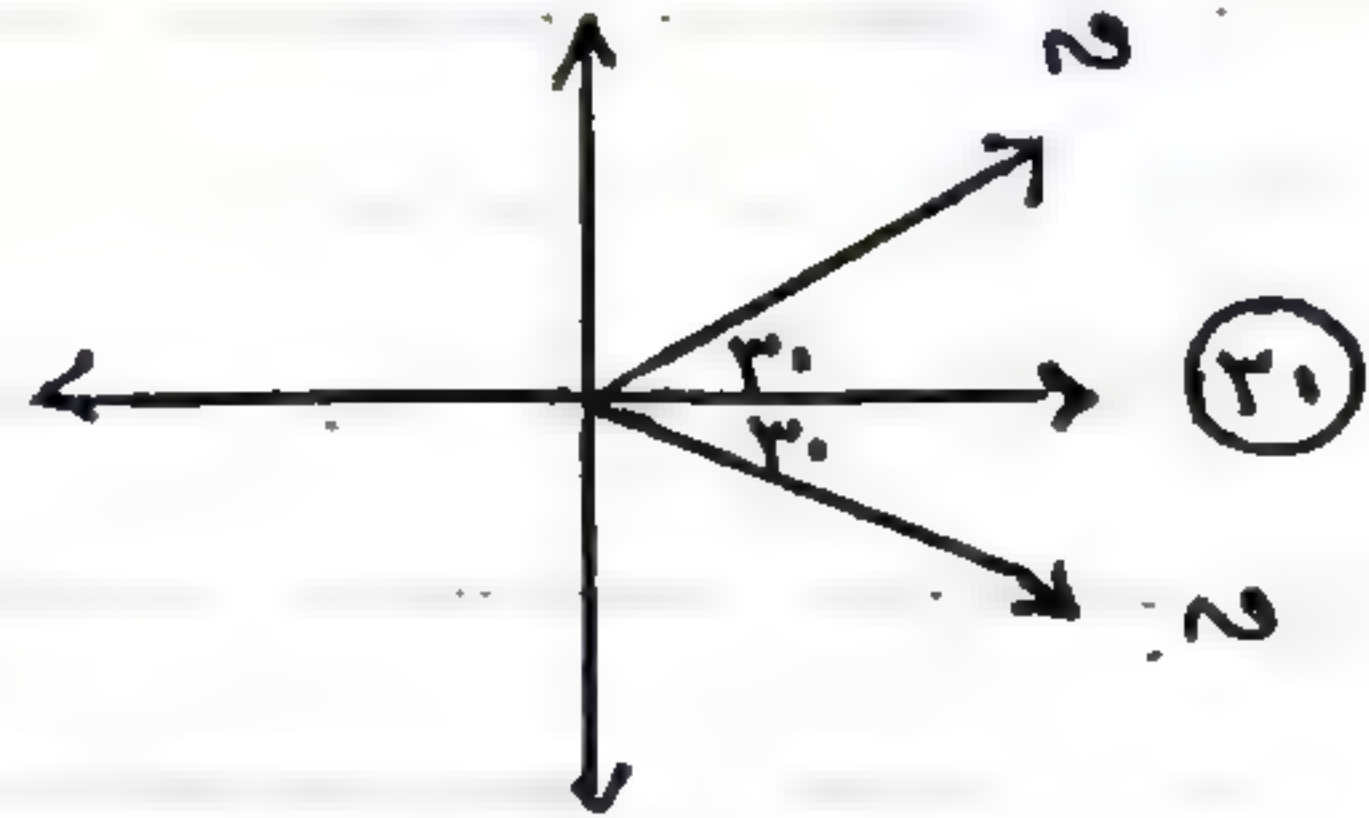


$$\bullet \quad ١٨ = \frac{٣٠ \text{ جا } ١٠٠}{(٣٠ + ٩٠)} = \frac{٣٧١٠٠}{٣} \text{ نيوتن}$$

$$\bullet \quad ٢٨ = \frac{٩٠ \text{ جا } ١٠٠}{(٣٠ + ٩٠)} = \frac{٣٧٢٠٠}{٣} \text{ نيوتن}$$

مثال حل قوة مقدارها ٣٠ نيوتن تؤثر في اتجاه الشرق على قوسين متساويين في المقدار وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

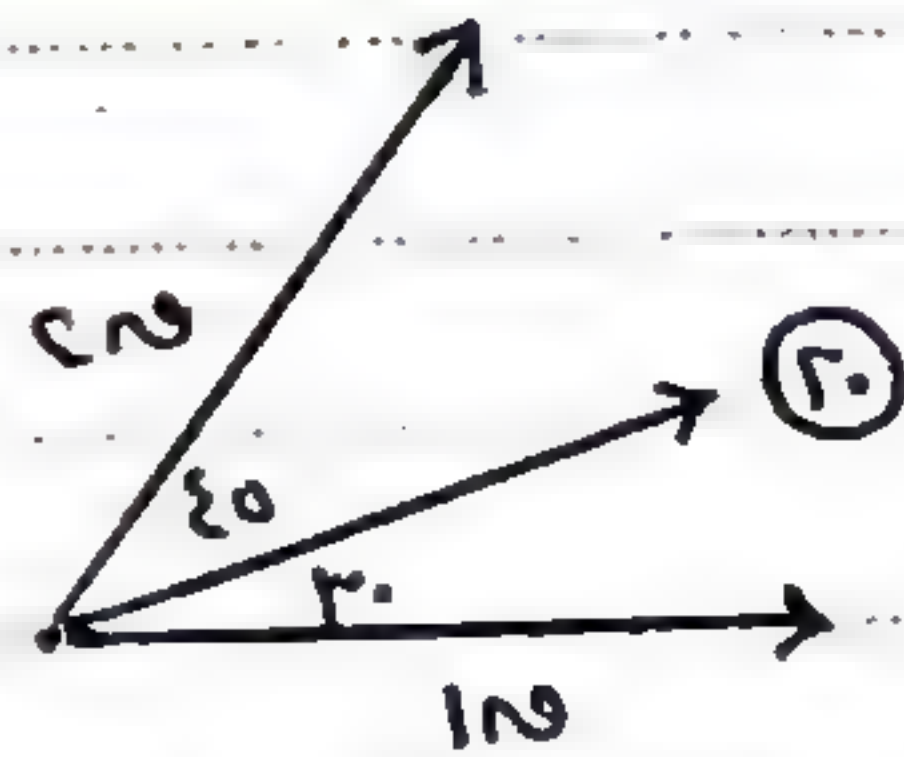
الحل



$$\bullet \quad ٢٨ = \frac{٣٠ \text{ جا } ٣٠}{(٣٠ + ٣٠)} = \frac{٣٧١٠}{٣} \text{ نيوتن}$$

مثال حل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن على مركبتين يميلان على اتجاه القوة بزواويتين قياسهما ٣٠° و ٤٥° في اتجاهين مختلفتين لأقرب ربعين عشريين؟

الحل



$$\bullet \quad ١٨ = \frac{٢٠ \text{ جا } ٤٥}{(٤٥ + ٣٠)} = \frac{١٤٦٤}{٣} \text{ نيوتن}$$

مثال أوجد مركبة \vec{v} في اتجاه المحاورين في كل مما يلي

① $\vec{v} = 3\vec{u} - 2\vec{w}$

الحل

٣ وحدة في اتجاه \vec{u}
٢ وحدة في اتجاه \vec{w}

⑤ $\vec{v} = (8, 135^\circ) \leftarrow$ متوازية قطبية

الحل

$\vec{u} = 8 \parallel \text{الحا } 135^\circ = 2\sqrt{2} \vec{u}$

$\vec{w} = 13 \parallel \text{الحا } 135^\circ = 2\sqrt{2} \vec{w}$

$\leftarrow 2\sqrt{2} \vec{u}$ في اتجاه \vec{u}

$\leftarrow 2\sqrt{2} \vec{w}$ في اتجاه \vec{w}

مثال حقل قوة مقدارها ٥ نيوتن في

اتجاهين متعامدين وبمسوح أحد هما مع اتجاه القوة زاوية 30° .

الحل

$10 = 5 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{2} \vec{u}$ نيوتن #

$20 = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{2} \vec{w}$ نيوتن #

يمكن حلها زوايا ما سوفت من غير ما ترسم

مثال حقل قوة مقدارها ٥ ت جم تقبل

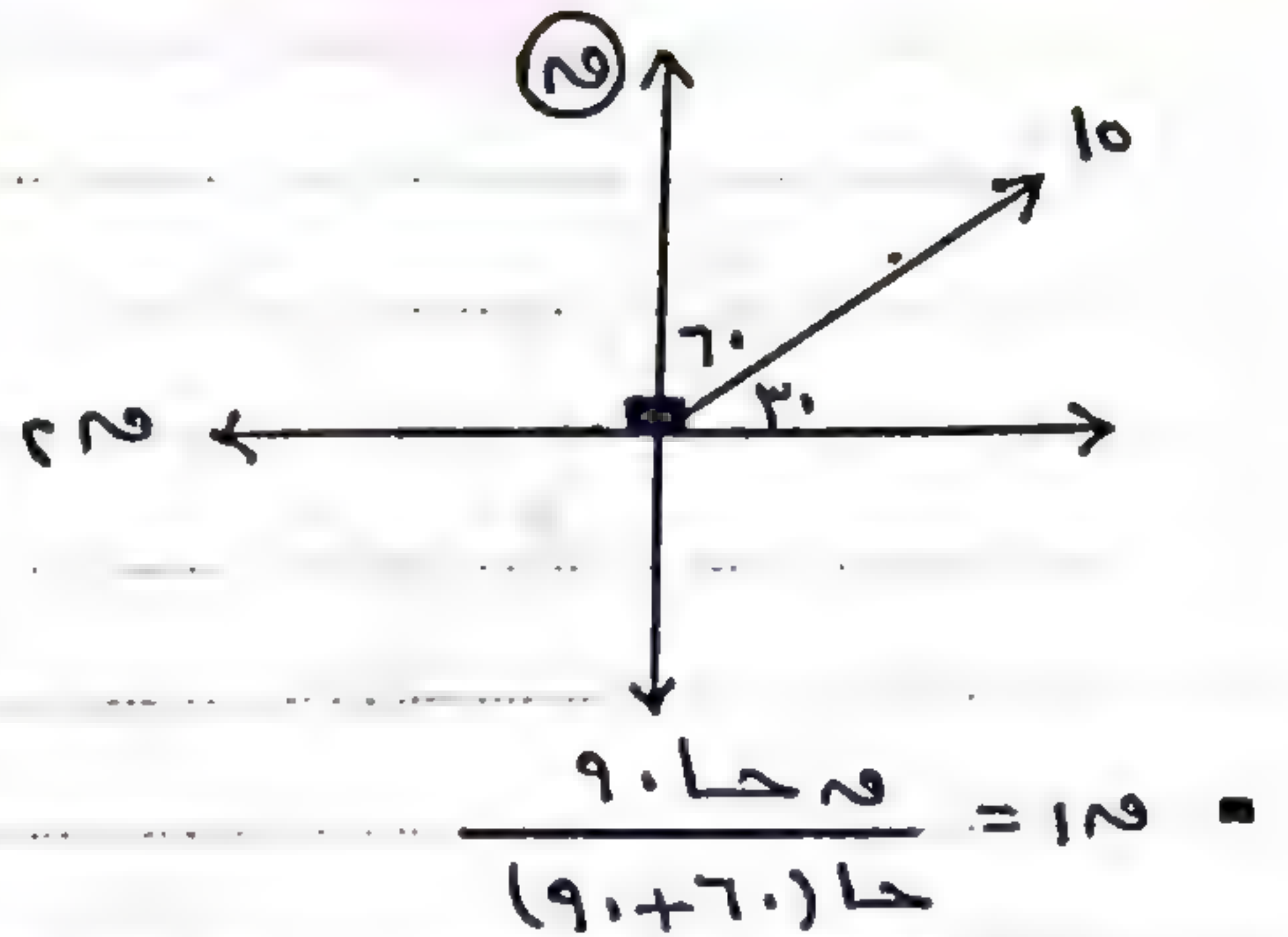
في اتجاه الشمال ٥ مركبة الأول

في اتجاه 30° شمال الشرق ومقدارها

١٥ ت جم والثانية في اتجاه الغرب أوجد

مقدار \vec{v} ومقدار المركبة الناتجة.

الحل



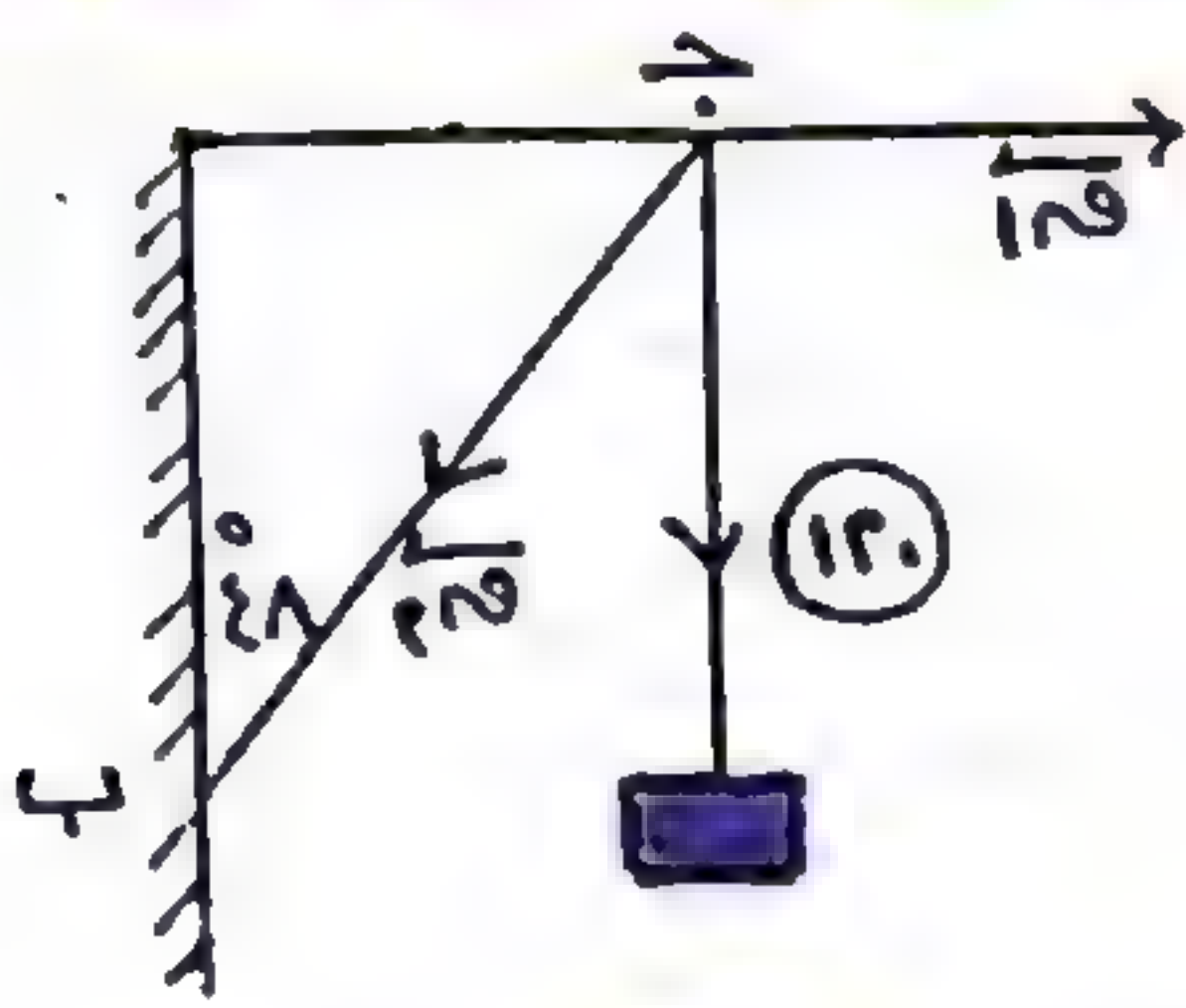
$\frac{1 \times 20}{\cos 30^\circ} = 10$

$\therefore 20 = 5 \cdot \cos 30^\circ$ #

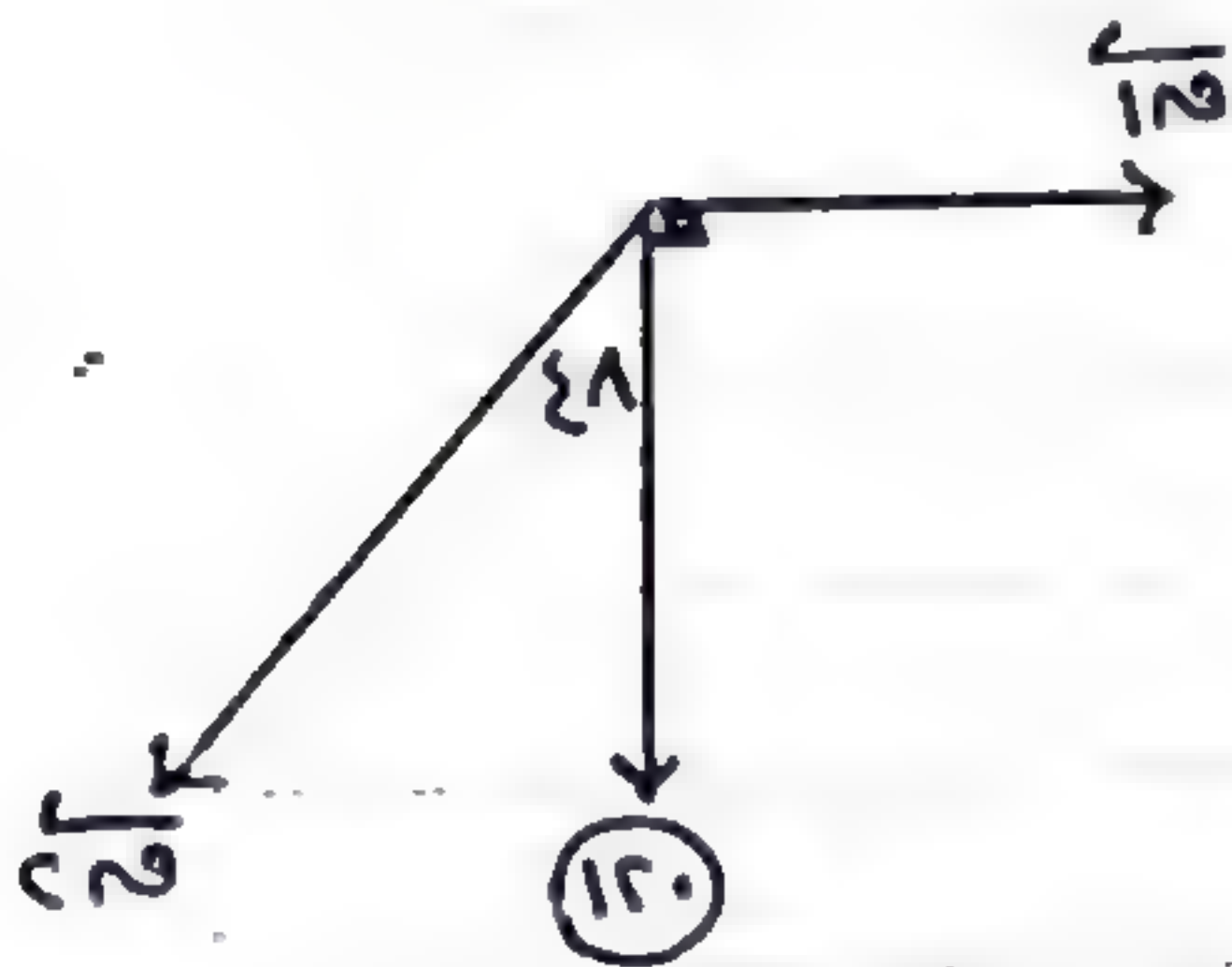
$\frac{6 \cdot 20}{10} = 20$ #

$\therefore 20 = \frac{20 \sqrt{3}}{2}$ #

مثال حلل القوة ١٢٠ نيوتن في اتجاه



الحل

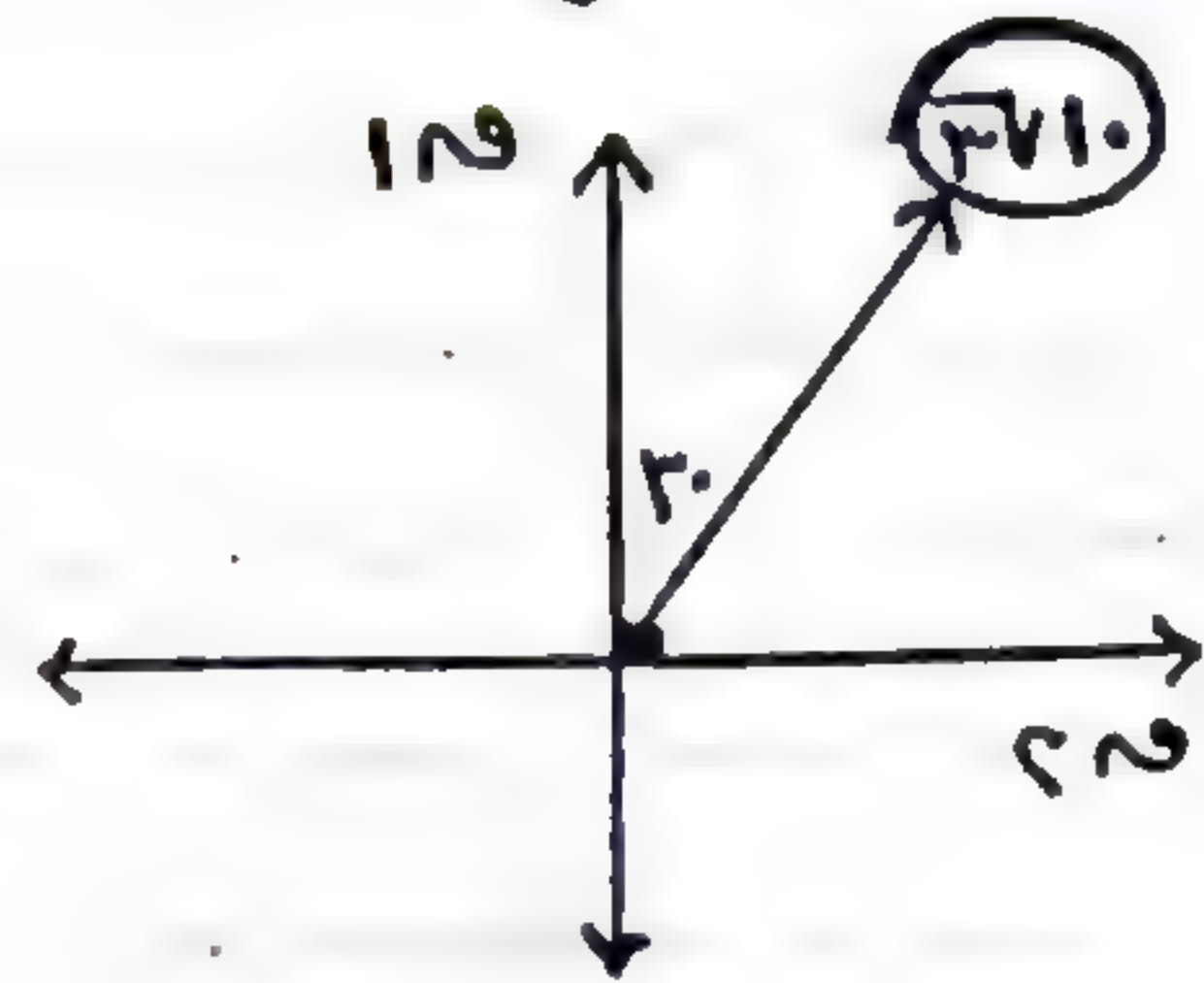


$$120 \text{ N} = \frac{120 \times \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 120 \text{ N}$$

$$120 \text{ N} = \frac{120 \times \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 120 \text{ N}$$

مثال حلل قوة مقدارها ٣٧١٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠° شرق الشمال الكبريتي في اتجاه الشمال والآخر في اتجاه الشرق.

الحل



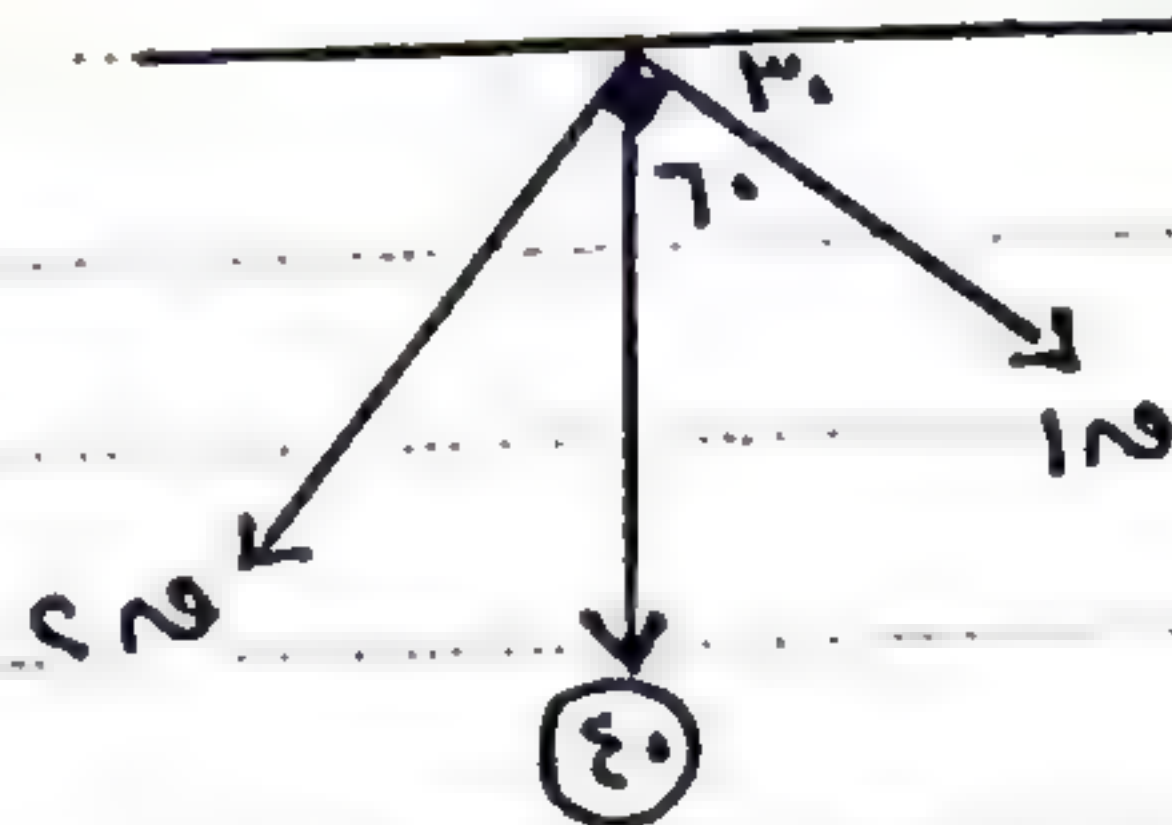
القوتان متعامدتان:

$$3710 \text{ N} \times \sin 30^\circ = 1855 \text{ N}$$

$$3710 \text{ N} \times \cos 30^\circ = 3210 \text{ N}$$

مثال اوجد مقدار المركبتين المتعامدتين لوزن جسم موهو على مسوكة أفقية ومقداره ٤٠٥ نيوتن اذا علم أن أحدهما يعمل على الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° للأسفل.

الحل



$$405 \text{ N} = \frac{405 \times \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = 202.5 \text{ N}$$

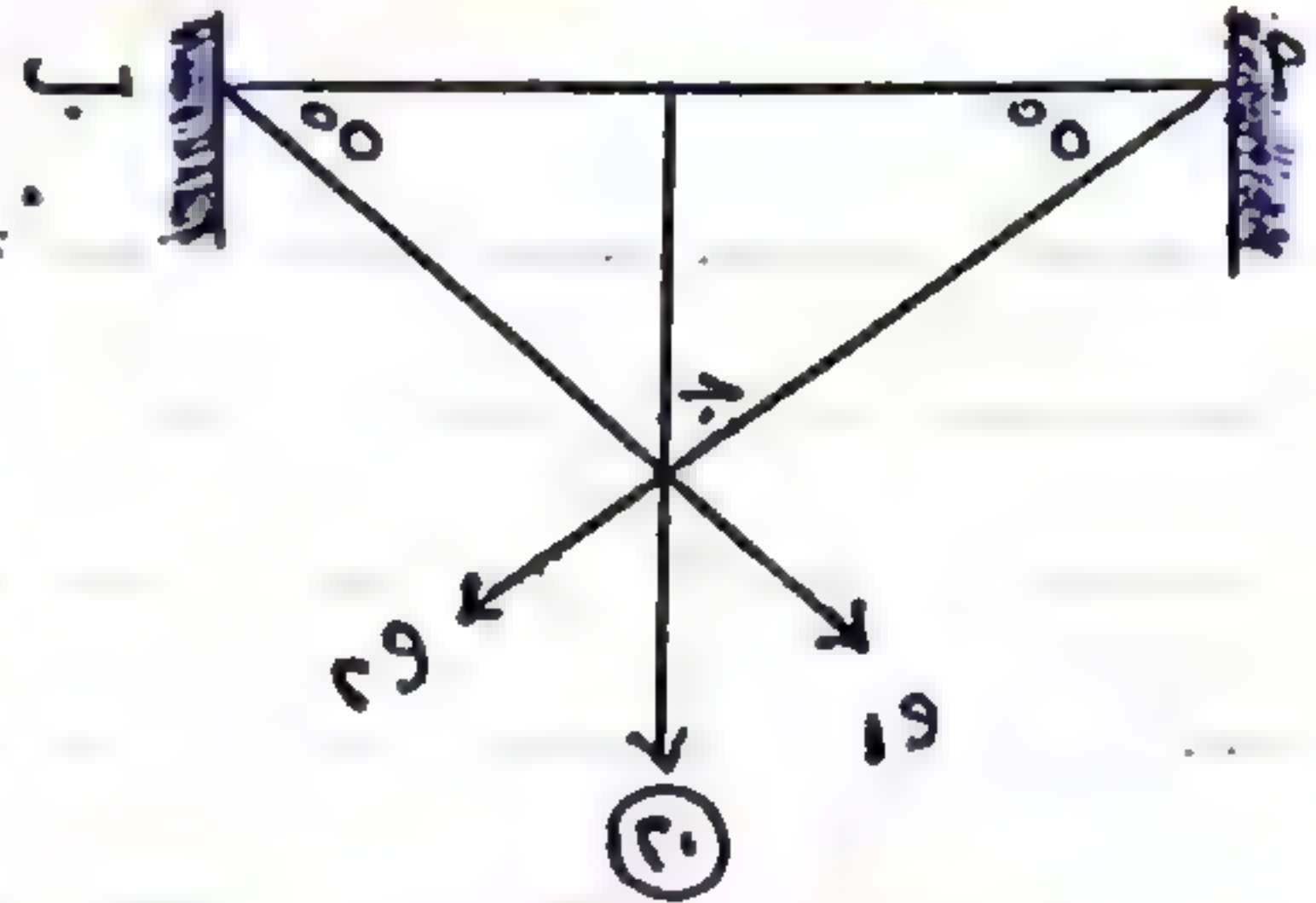
$$405 \text{ N} = \frac{405 \times \cos 30^\circ}{\sin 90^\circ} = 350.8 \text{ N}$$

$$\frac{٢٠ \text{ ح } ٨٥}{(٨٥+٨٥)} = ٢٩ = ١٩ = ١٩$$

$$\approx ٧٤, ١١٤ \text{ نيوتن} \#$$

■ عندما تقل الزاوية مع الأفق عن ٥°
فإن مقدار مركبة الوزن في الاتجاه
الجبلين يزداد الهاب يسمح لانهايا
عندما تكون الجبل أفقياً.

مثال مصباح وزنه ٢٠ نيوتن ملصق بجبلين
مدينتين ٢٠ ج ٢٠ ج ٢٠ ج يميلان على
الأفق بزاويتين متساويتين كل منهما ٥°



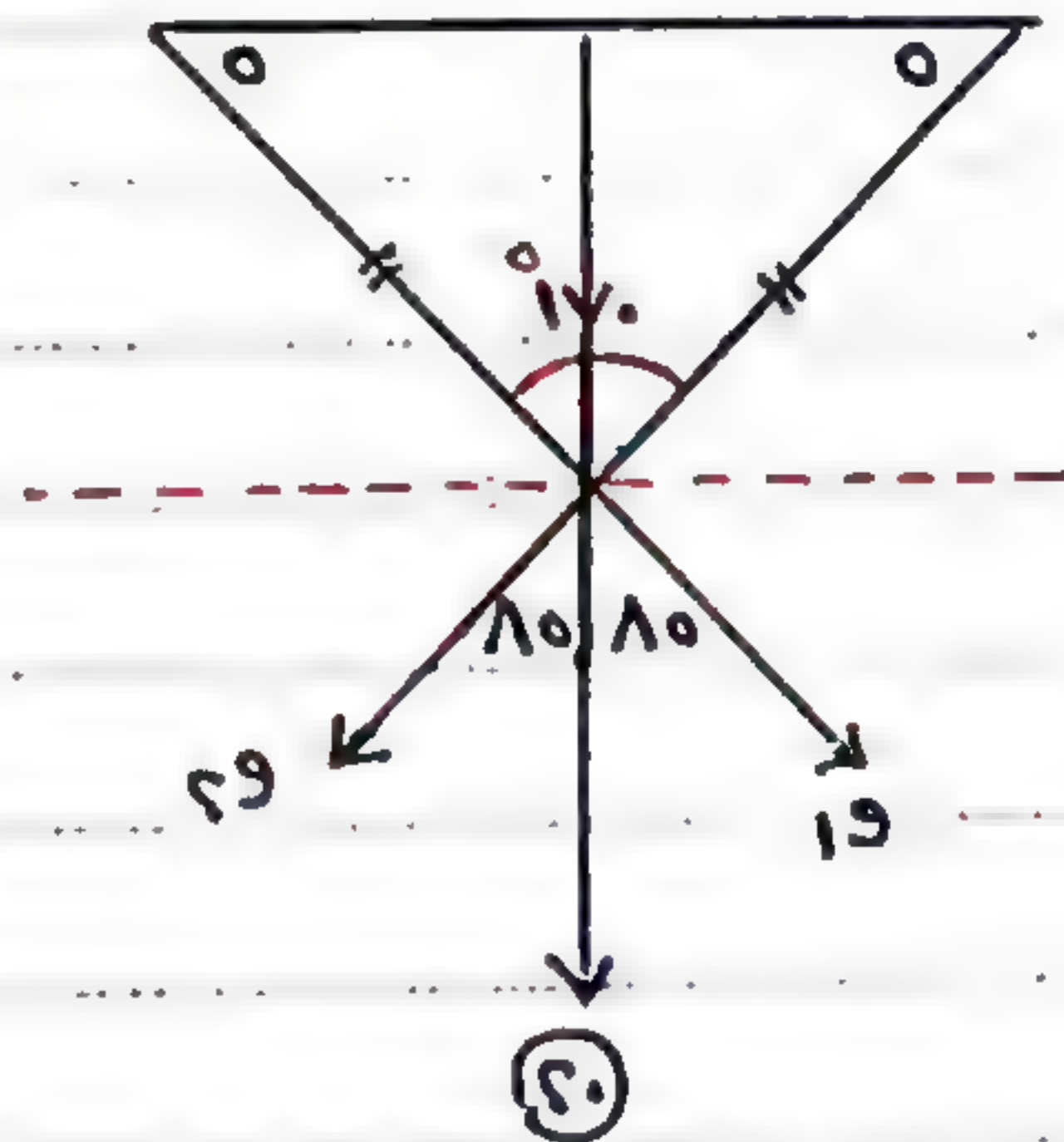
٢ حل وزن المصباح في الاتجاهين

$$\vec{P} \text{ ج } ٢٠ \text{ ج } ٢٠$$

ب) فإذا حدث لمركبة الوزن في الاتجاه

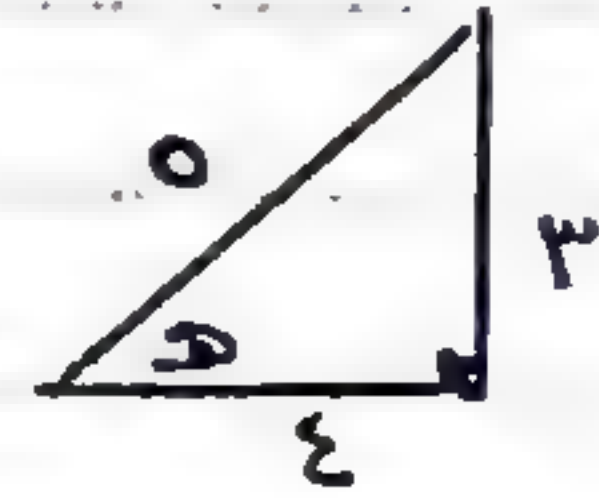
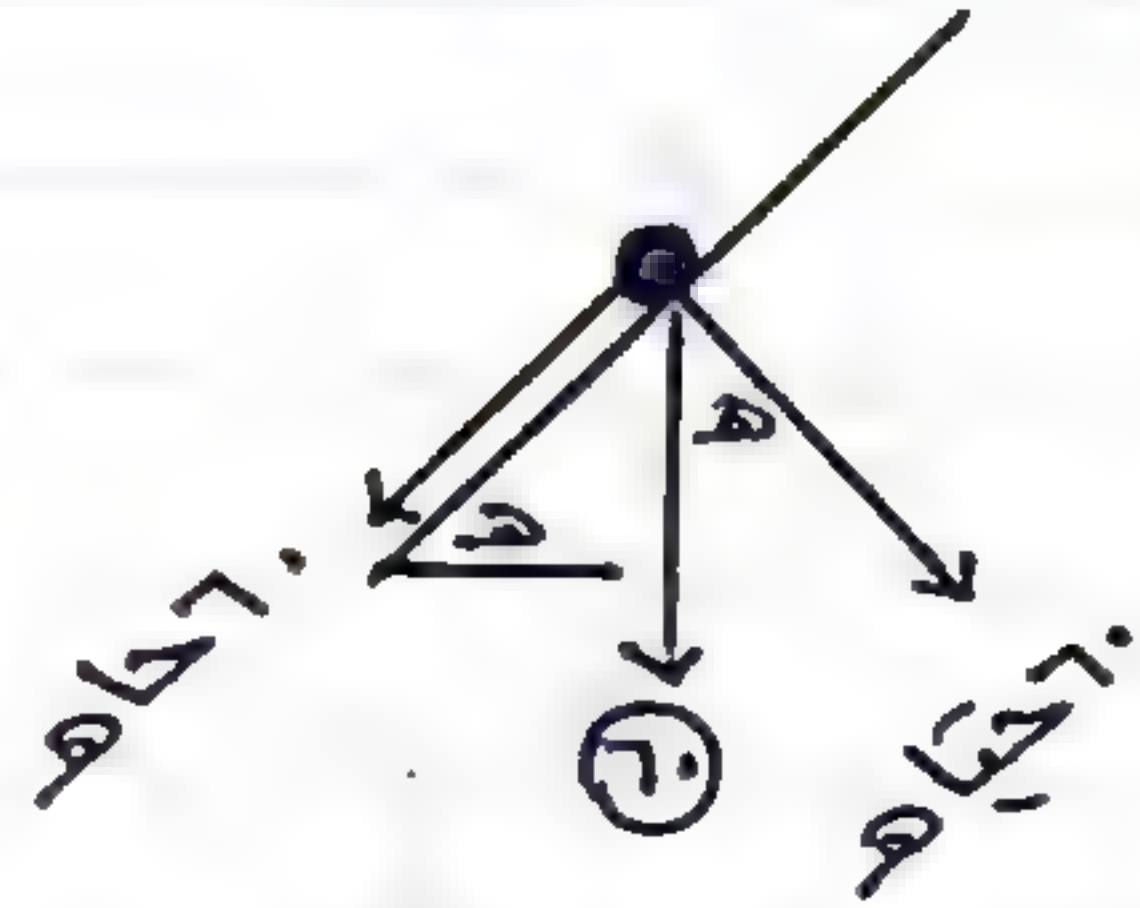
الجبلين المدينتين إذا نقص قياس زاوية
مع الأفق عن ٥° .

الحل



مثال جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوعة على مستو مائل يميل على الأفق بزاوية ه حيث $\tan \theta = \frac{3}{4}$ أوجد مقدار مركبة الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوية والاتجاه العمودي عليه؟

الحل

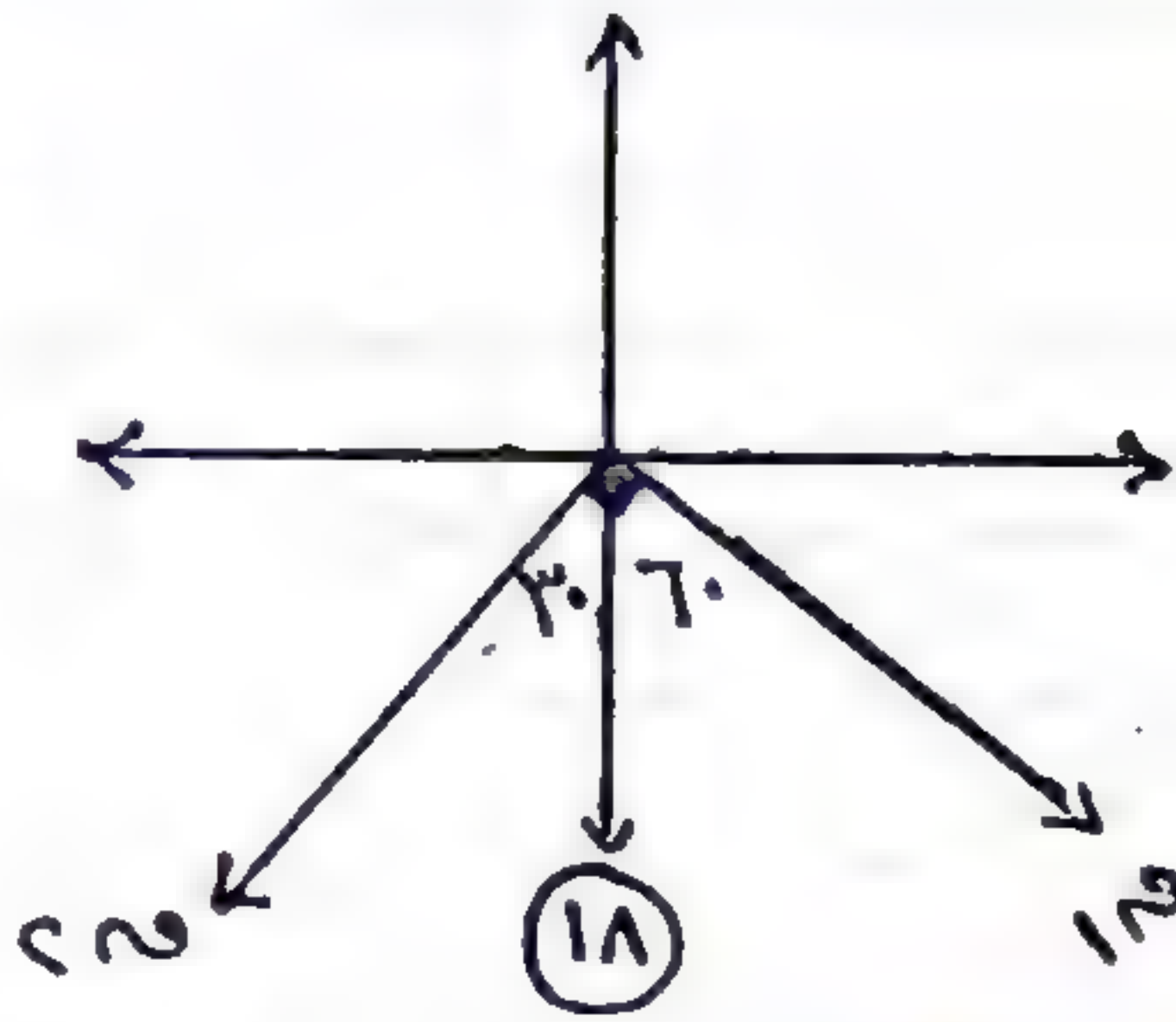


$$\bullet \quad ١٨ = ٦٠ \text{ حيا } \theta = \frac{3}{5} \times ٦٠ = ٣٦ \text{ نيوتن}$$

$$\bullet \quad ٤٨ = ٦٠ \text{ حيا } \theta = \frac{4}{5} \times ٦٠ = ٤٨ \text{ نيوتن}$$

مثال قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب أوجد مركبتها في اتجاه ٦٠° شرق الجنوب ٣٠° غرب الجنوب

الحل



■ الحل الأول

$$١٨ = \frac{١٨ \text{ حيا } ٣٠}{(٦٠ + ٣٠)} = ٩ \text{ نيوتن}$$

$$٤٨ = \frac{١٨ \text{ حيا } ٦٠}{(٦٠ + ٣٠)} = ٣٦ \text{ نيوتن}$$

■ الحل الثاني:

$$١٨ = ١٨ \text{ حيا } ٦٠ = ٩ \text{ نيوتن}$$

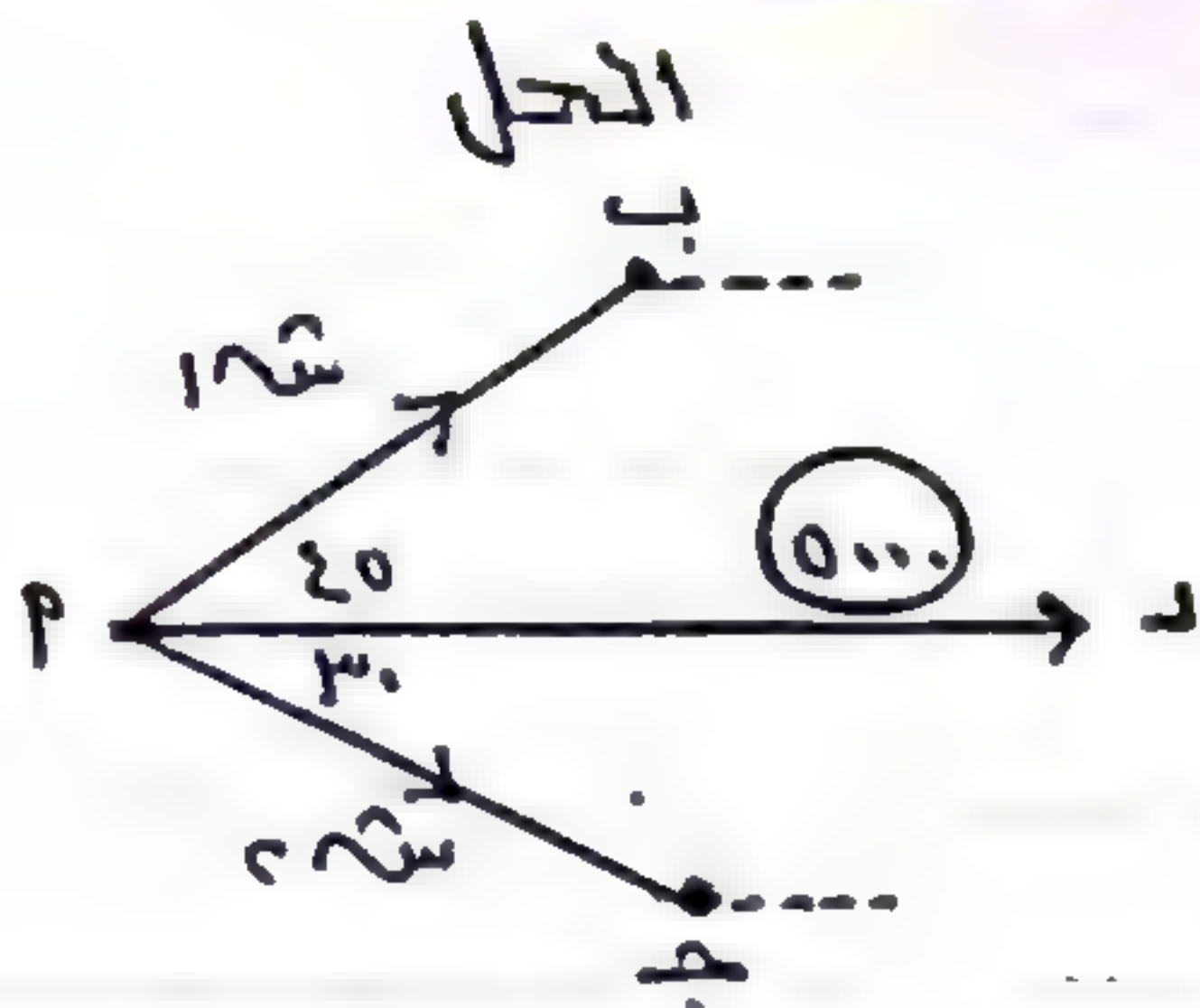
$$٤٨ = ١٨ \text{ حيا } ٣٠ = ٣٦ \text{ نيوتن}$$

■ الحل الثالث

$$٤٨ = ١٨ \text{ حيا } ٣٠ = ٣٦ \text{ نيوتن}$$

$$١٨ = ١٨ \text{ حيا } ٦٠ = ٩ \text{ نيوتن}$$

مثال يريد سحب بارجة بواسطة قاطرين
تعمل بجبلين مثبتين في خلاف في
نقطة P على البارجة وقياس الزاوية
بينهما 70° فإذا كانت زاوية ميل حب
الجبلين على P $= 40^\circ$ وكانت
محصلة القوى المبدئية لسحب البارجة
5000 نيوتن وتعمل في اتجاه P أو جد
الشد في الجبلين؟

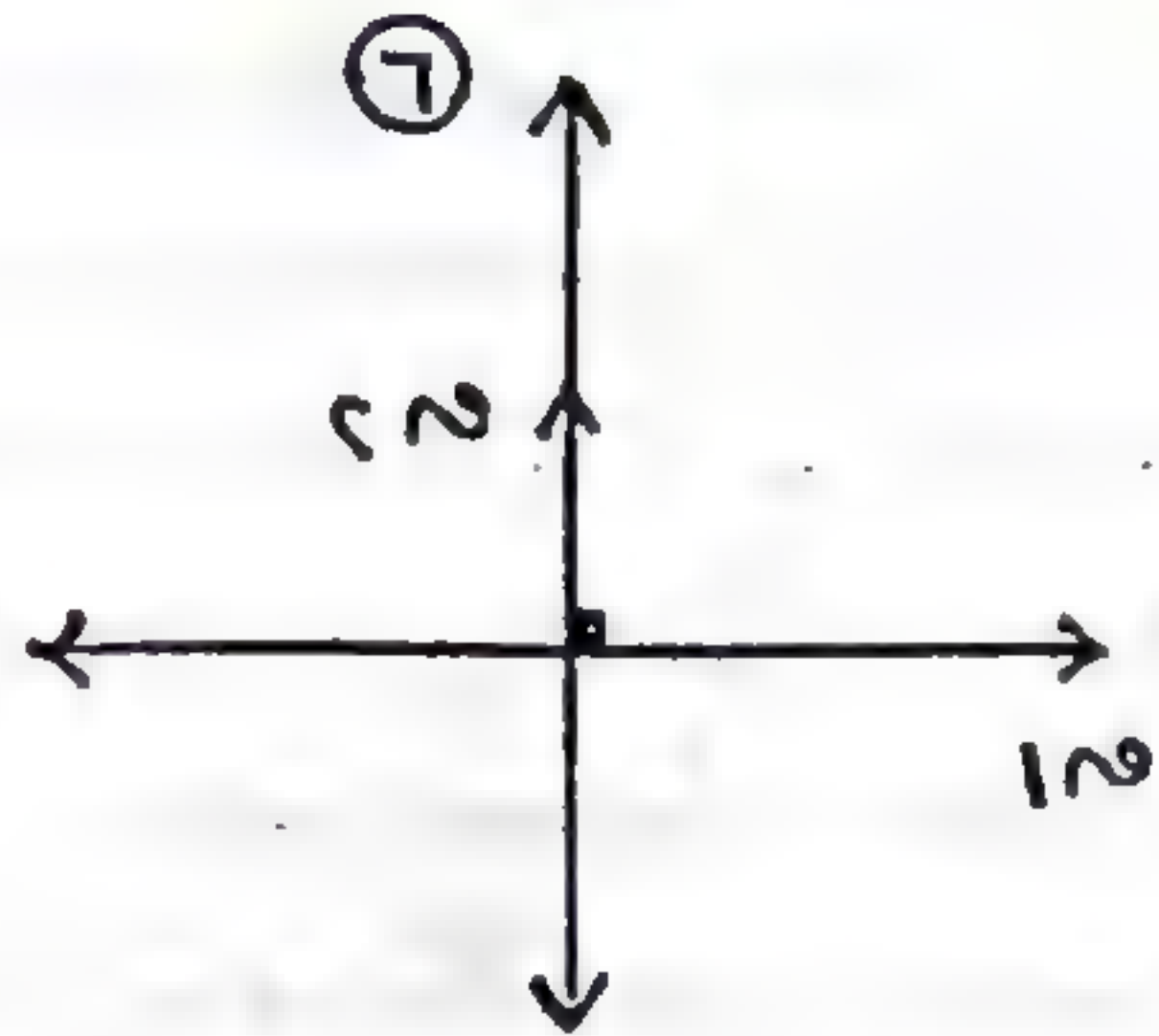


$$180 = \frac{5000 \text{ حـ} 30}{(40+30)} = 2588,2 \text{ نيوتن}$$

$$180 = \frac{5000 \text{ حـ} 40}{(40+30)} = 3660,3 \text{ نيوتن}$$

مثال قوة مقدارها 6 نيوتن تعمل في
اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين
معامدين فان مركبتها في اتجاه
الشرق تساوي 4 نيوتن

الحل



$$4 = 6 \text{ جـ} 60^\circ = 6 \times 0,8 = 4,8 \text{ نيوتن}$$

$$180 = 6 \text{ جـ} 30^\circ = 6 \times 0,5 = 3 \text{ نيوتن}$$

• نطلع منها بمثلحوتة حلوة جدا

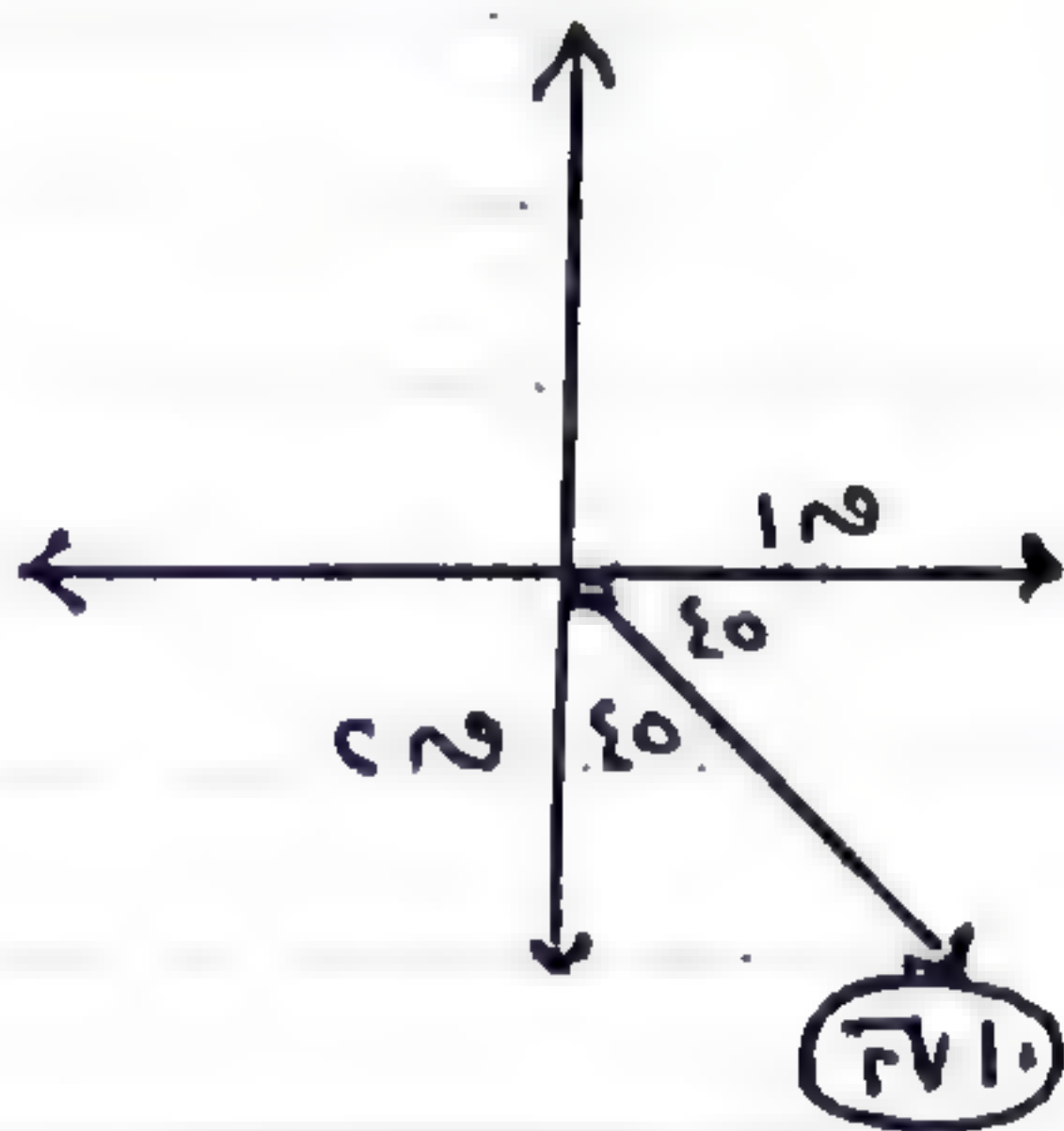
إذا كانت القوتان متعامدتان والمحصلة
منطبقة على أحد القوتين فإت المحصلة
تساوي القوة المنطبقة عليها أما القوة
الأخرى تساوي صفر.

مثال قوة مقدارها ٢٧١٠ ت. جم تقبل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها الى مركبتين متعامدتين فان مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب

يساوي ت. جم

١٥ (د) ١٠ (ب) ٢٣ (ج)

الحل



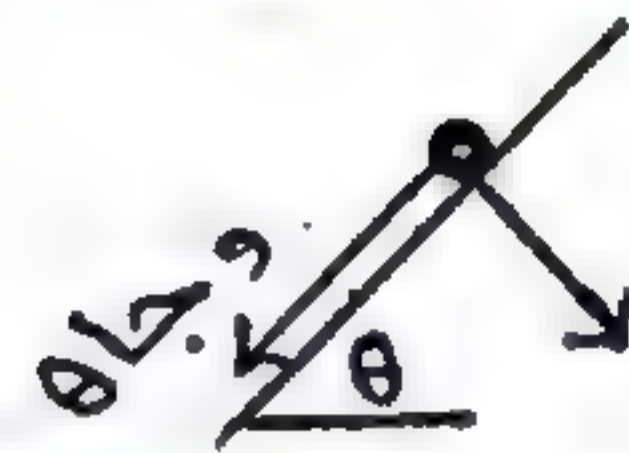
$$2710 \cdot \sin 45 = 230$$

$$2710 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \cdot \text{ت. جم}$$

خط: اسمنا ٢٧١٠ في المنتصف لذات الباشا لم يجد اوم يمشي زاوية.

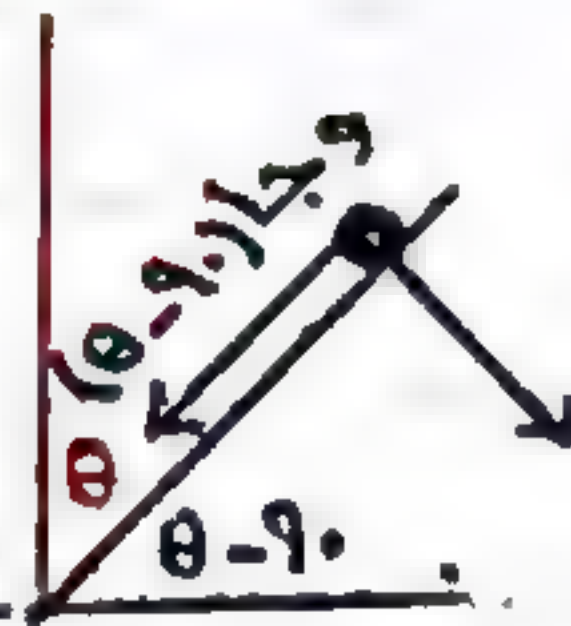
مثال اذا وضع جسم وزنه (٩) على مستوي مائل يميل على الأفق بزاوية ١٠ فان مركبة وزنه في اتجاه المستوي يساوي

٩ (د) و ٥ (ب) و ٥ (ج) و ٥ (د)



مثال اذا وضع جسم وزنه (٩) على مستوي مائل يميل على الرأس بزاوية ٥ فان مركبة وزنه في اتجاه المستوي يساوي

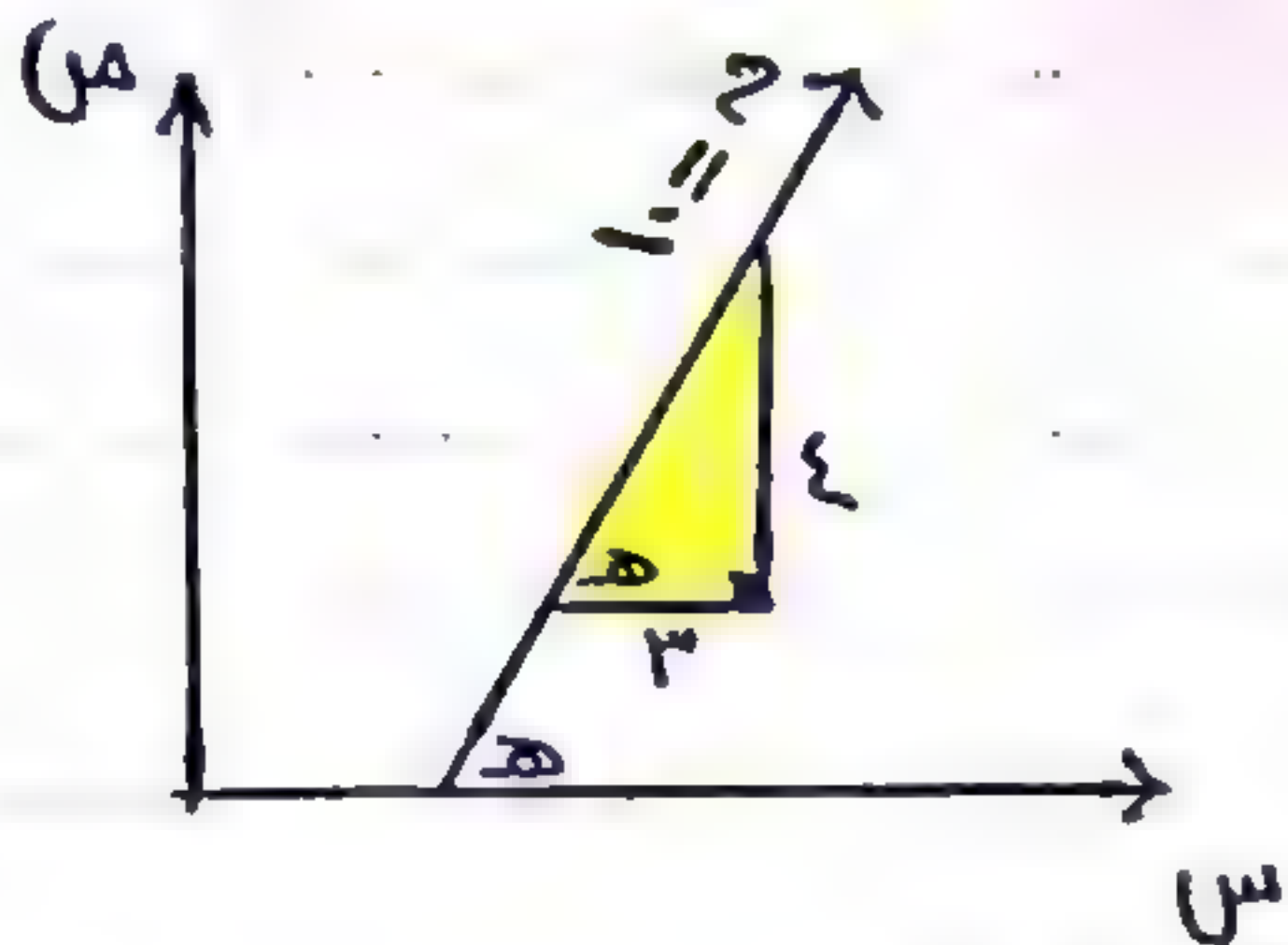
٩ (د) و ٥ (ب) و ٥ (ج) و ٥ (د)



$$9 = 120 \cdot \sin(90 - \theta)$$

$$= 5 \cdot \sin \theta$$

مثال) قوة السلك المقابل مركبة القوة فك
اتجاه وس تساوي نيوتن

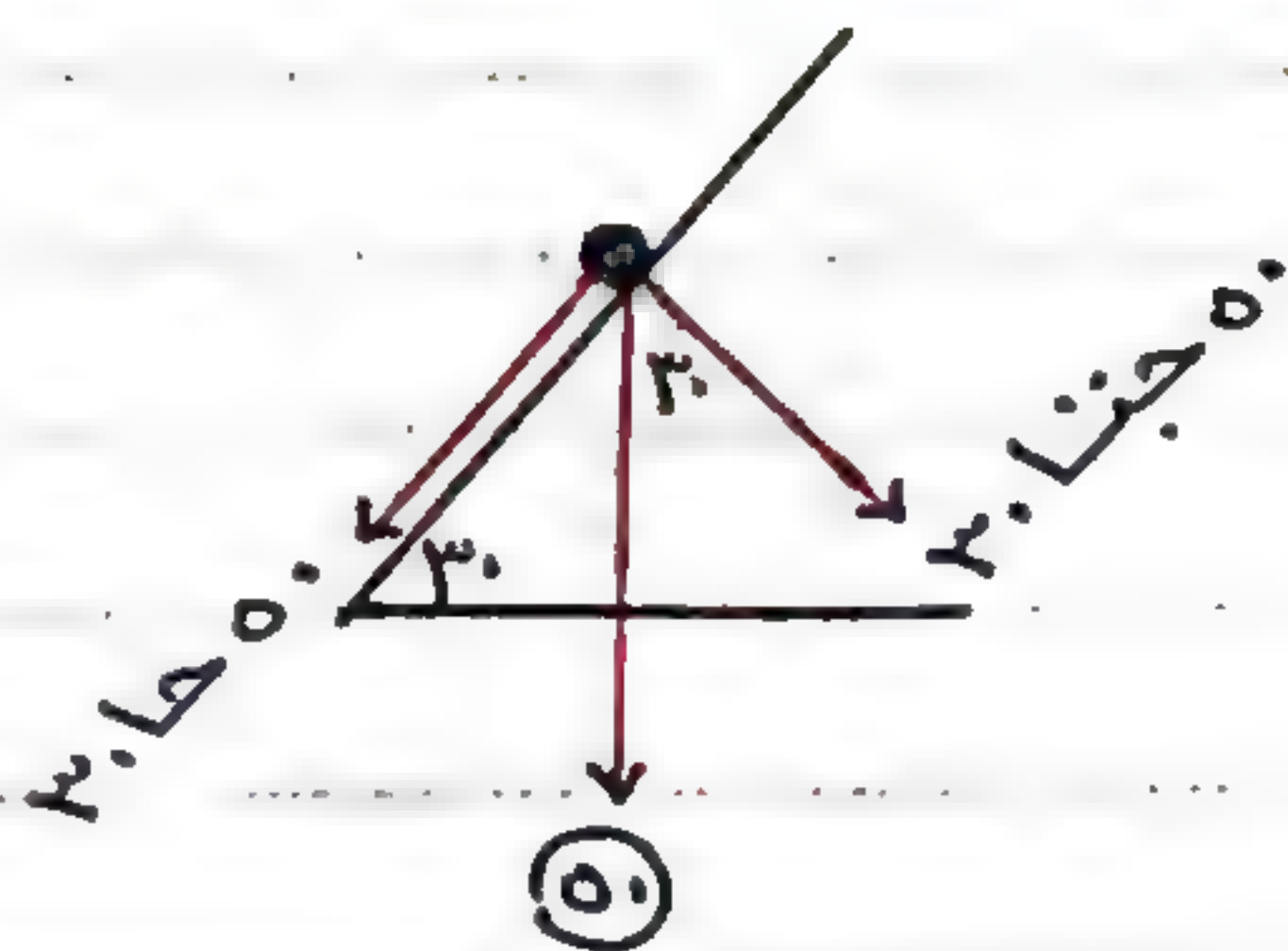


الحل

$$ص \text{ (اتجاه وس)} = 10 \text{ جتا } 30^\circ = 10 \times \frac{3}{5} = 6 \text{ نيوتن}$$

مثال) ومنه حسب وزنه ٥٠ نيوتن على
مستوى مائل على الأفق بزاوية قياسها
٣٠° اوجد مقدار مركبة وزنه الجسم
فك اتجاه خط الجرميل المستوي والاتجاه
المودك عليه؟

الحل



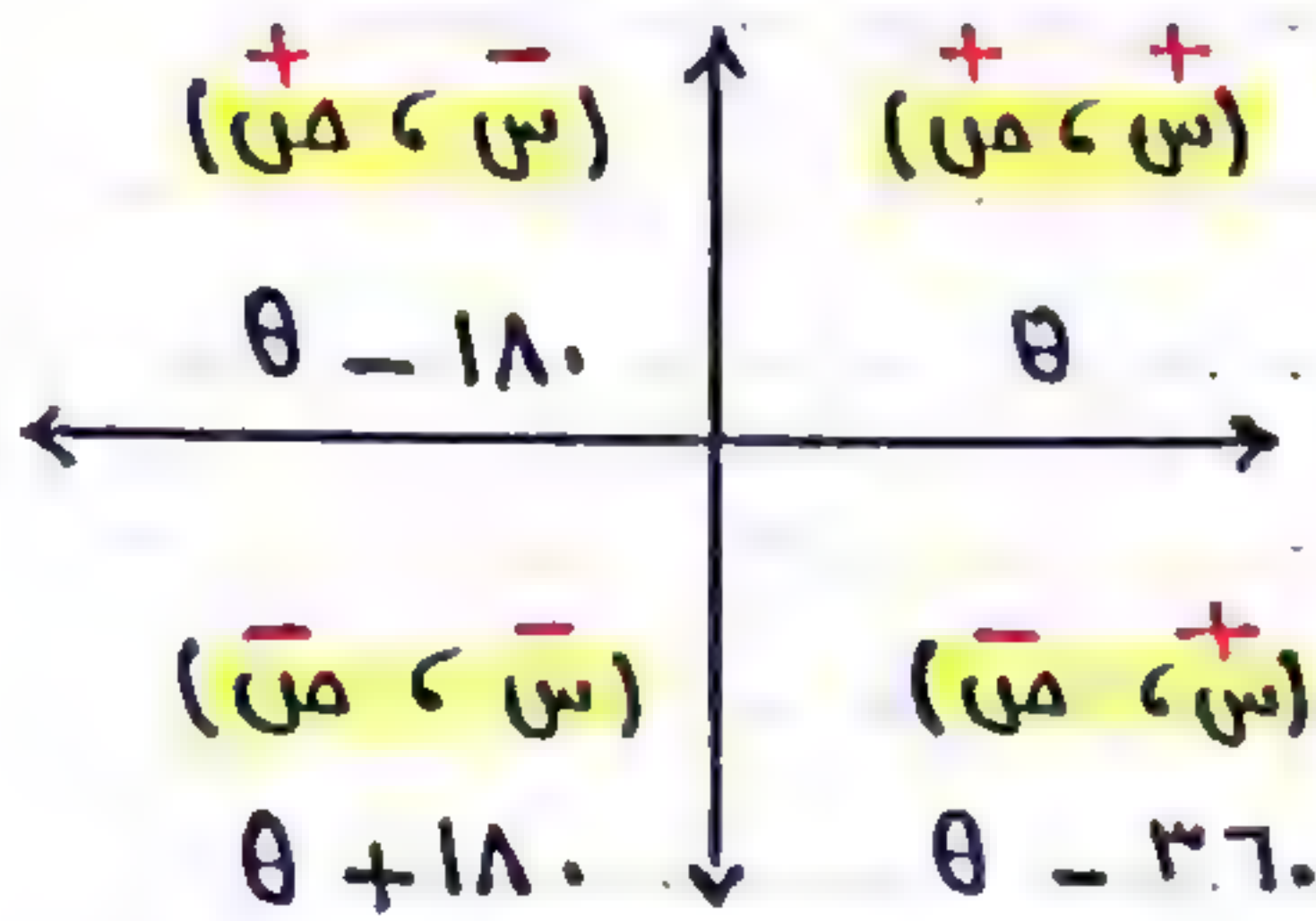
١ ص (فك اتجاه خط الجرميل)

$$= 50 \text{ حنا } 30^\circ = 50 \times \frac{1}{2} = 25 \text{ نيوتن}$$

٢ ص (المودك على المستوي)

$$= 50 \text{ حنا } 60^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 43.3 \text{ نيوتن}$$

• آخرًا: نلاحظ $\frac{ص}{س} = \text{نظا هـ}$ (ركز معياريا
تروح على الحاسبة بكتب $\text{shift tan}(\frac{ص}{س})$
بدون الاشارة طبعا بفهم تكتبها على الحاسبة
بالموجب وترجع تحت اشارة س ص فك
ان ربع من خلال الشكل التالي



• ملاحظات هامة جدا:
ب اذا كانت القوي مترية فان:
 $\vec{ح} = \vec{ص} = \vec{س} = (0,0)$ ∴ $ص = س = 0$

ب اذا كانت:
• $\vec{ح} = س = \vec{س} = 0$ ∴ $ص = 0$
ك هـ = 0 ∴ $\vec{ح} = س = 0$ ∴ $ص = 0$
ل هـ = 180 ∴ $\vec{ح} = س = 0$

• $\vec{ح} = ص = \vec{ص} = 0$ ∴ $س = 0$
ك هـ = 90 ∴ $\vec{ح} = س = 0$
ل هـ = 270 ∴ $\vec{ح} = س = 0$

ب اذا كانت: المحصلة ك الصورة القطبية
 $\vec{ح} = (له \theta)$ فان
• $س = اله الاجتا هـ$ • $ص = اله الاجا هـ$

② محصلة عدة قوئ مستوية متلاقية في نقطة:
• الشرط اللازم والكاف لاتزان مجموعة
من القوئ هو ان تمثل هذه القوئ
هندسياً بمتلاق في مغلقة مأخوذة
فك تر ييب دورك واحد.

• اذا كان: $\vec{ق1}, \vec{ق2}, \vec{ق3}, \vec{ق4}$ مجموعة
قوئ توثر جميعاً في نقطة مادية فان:

$$\vec{ح} = \vec{ق1} + \vec{ق2} + \vec{ق3} + \vec{ق4}$$

$$= (ص \text{ ص} + س \text{ س}) \text{ صورة متجهة}$$

$$= س \text{ ص} + ص \text{ س}$$

$$\vec{ح} = \vec{ص} + \vec{س} \text{ مقدارا}$$

$$\vec{ح} = \frac{ص}{س} \text{ اتجاهها}$$

حيث (هـ) زاوية ميل المحصلة على محوا
السينات.

• خطوات الحل:

• ارسم المسألة ك نظام احداثي متعامد

• حدد كل قوة والزاوية التي تصنفها مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات

• $س = ص \text{ جتا هـ} + \dots$

• $ص = س \text{ جتا هـ} + \dots$

• $\vec{ح} = \vec{ص} + \vec{س}$

०५ '√' 'Λ' = ७ ∴

$$F_- = P \therefore \dots = P + F$$

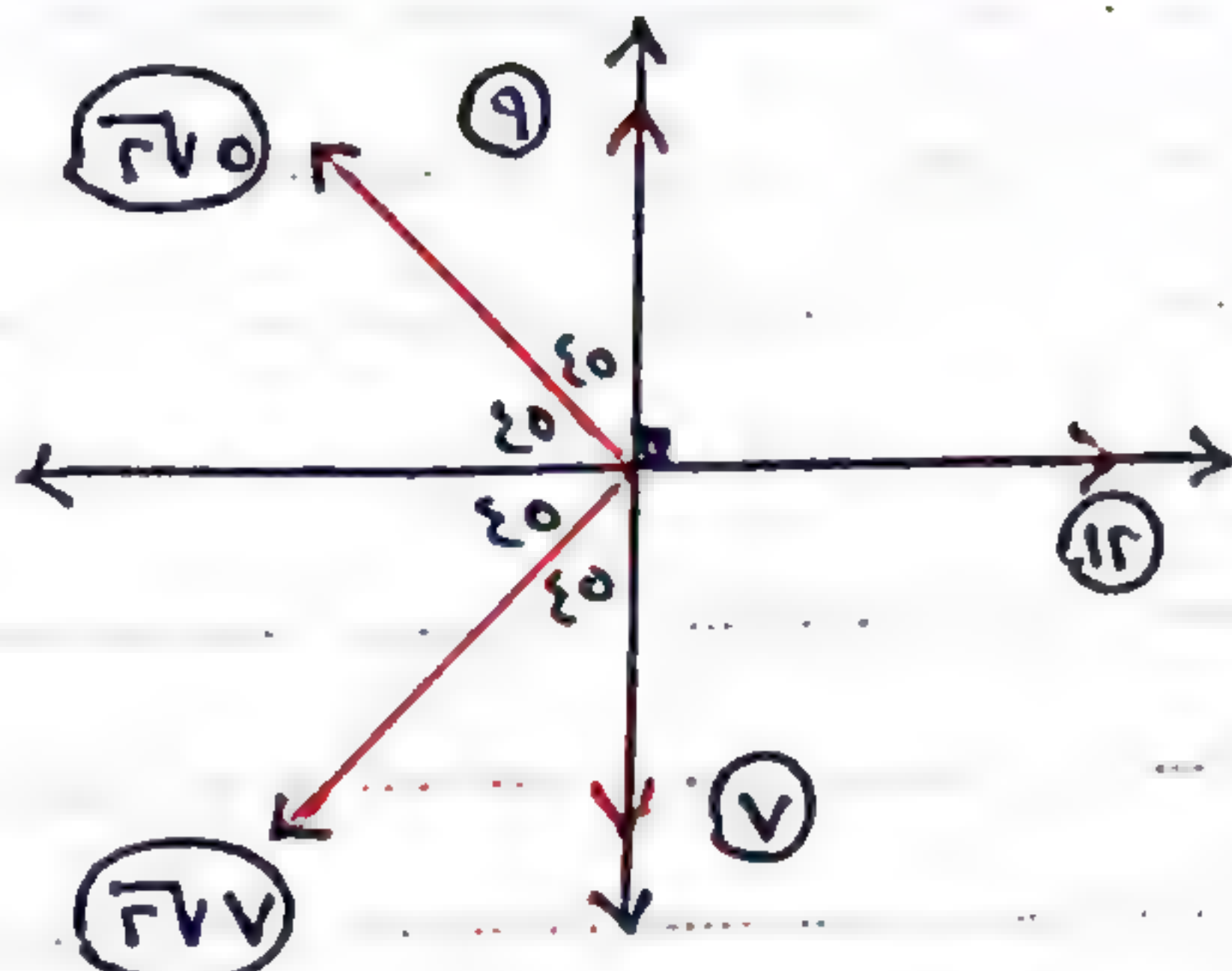
وَالْبَاجَاهُ.

A hand-drawn diagram of a coordinate plane. The horizontal axis is labeled with '70' on the left and '20' on the right. The vertical axis is labeled with '70' on the left and '20' on the right. Four rays originate from the origin, each pointing to a circled number: '376' (top-left), '378' (top-right), '12' (bottom-left), and '1' (bottom-right). The origin is marked with a circled '1'.

$$x = \sqrt{12 + 4\sqrt{5}} = 7.$$
$$r_{\text{eff}} = 7.0 + 1.0 = 8.0 \text{ cm} \leftarrow \frac{\sqrt{1.5}}{1.5} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$$

مثال خمس قوا مستوية ومثلًا قسمة
 في نقطة مقاديرها ١٢ ٩ ٥ ٦ ٧
 ٧ نيوتن بفعل في الشرق ك الشمال
 ٩ الشمال الغربي ٥ الجنوب الغربي ٦
 والجنوب على الترتيب أثبت أن المجموعة
 متزنة .

الحل



$$(12, 0) + (0, 9) + (0, -5) + (-6, -6) + (-7, 7) = (0, 0)$$

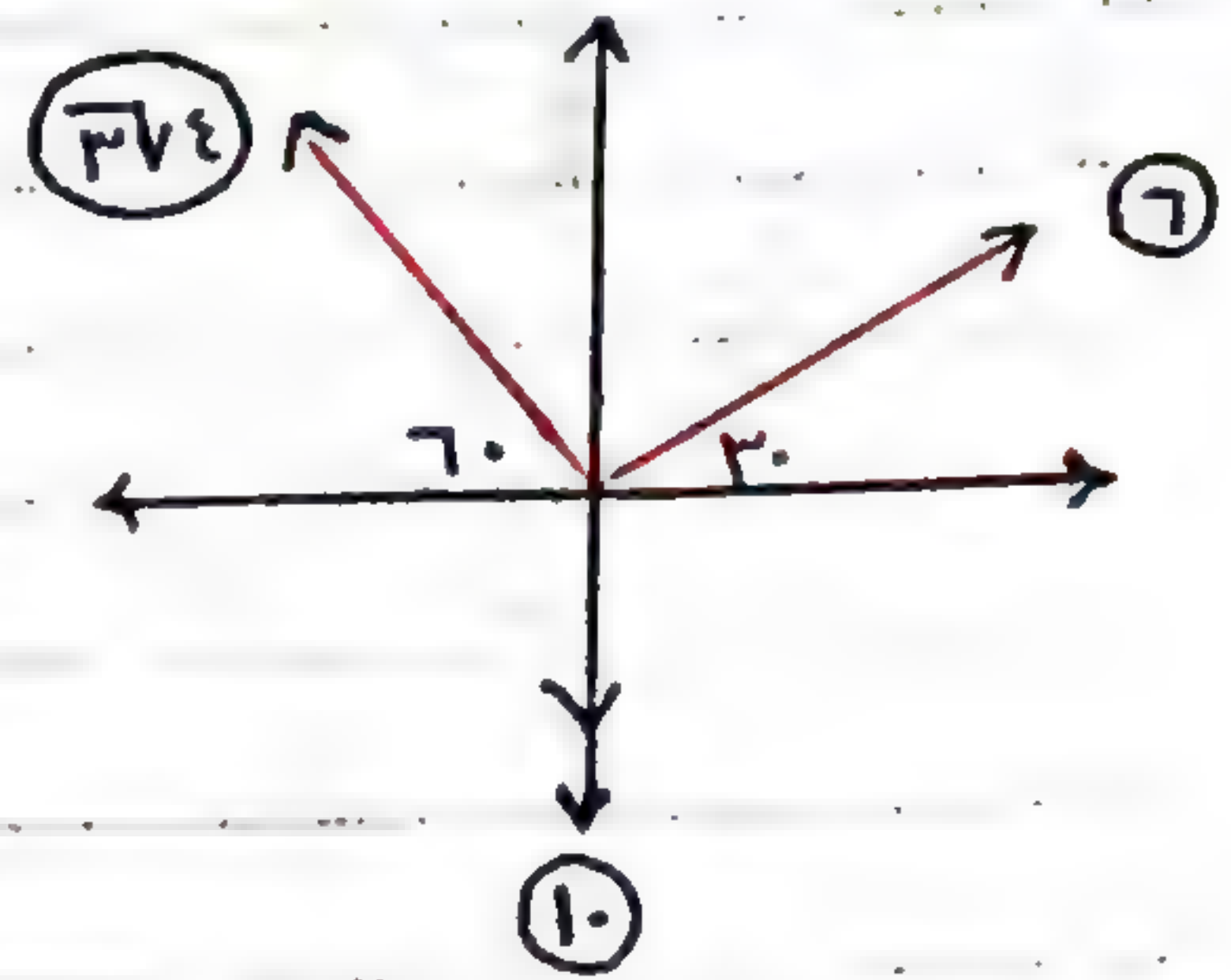
$$12 \text{ حيا } 0 + 9 \text{ حيا } 9 + 0 \text{ حيا } 135 + 7 \text{ حيا } 315 + 6 \text{ حيا } 225 = 0$$

$$12 \text{ حيا } 0 + 9 \text{ حيا } 9 + 0 \text{ حيا } 135 + 7 \text{ حيا } 315 + 6 \text{ حيا } 225 = 0$$

∴ المجموعة متزنة #

مثال ثلاث قوا مستوية مقاديرها
 ٦ ٣ ٤ نيوتن تؤمن في نقطة
 مادية في الاتجاهات ٣٠° شمال الشرق
 ٦٠° شمال الغرب ٤ الجنوب
 مطلقا واتجاه المحصلة

الحل



$$(6, 60) + (3, 30) + (4, 270) = (0, 0)$$

$$6 \text{ حيا } 30 + 3 \text{ حيا } 60 + 4 \text{ حيا } 270 = 0$$

$$6 \text{ حيا } 30 + 3 \text{ حيا } 60 + 4 \text{ حيا } 270 = 0$$

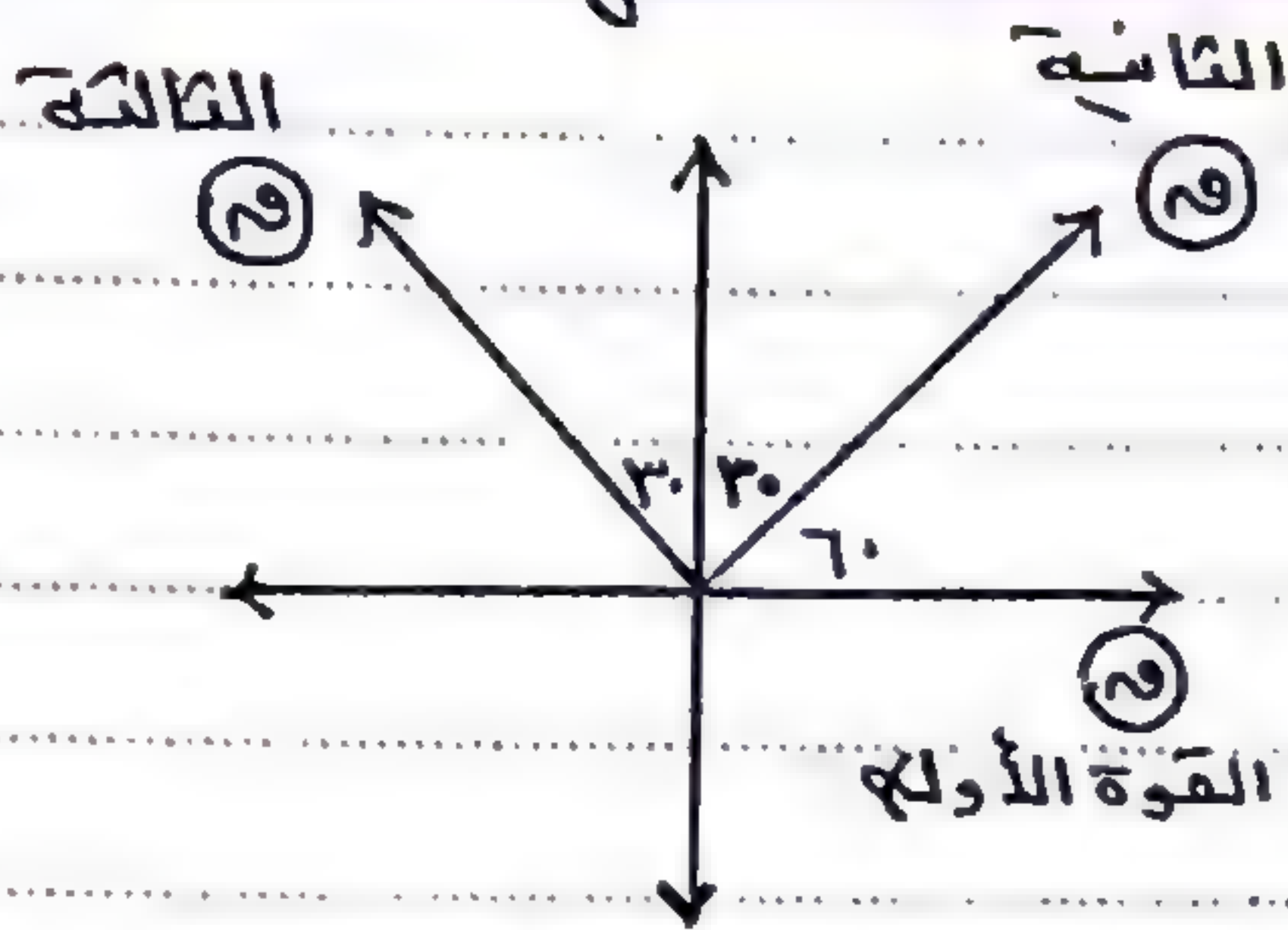
$$R = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3.2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{1} \right) = 71.5^\circ$$

$$\therefore \theta = 360 - 71.5 = 288.5^\circ$$

مثال ثلاث قوا مستوية ومتساوية في المقار تؤثر في نقطة مادية وكان خط عمل القوة الثانية يصنع مع اتجاه القوسين الأول والثالث زاوية قياس كل منهما 70° أوجد المحصلة ؟

الحل



$$(0, 6N) \quad (70, 6N) \quad (120, 6N)$$

$$N = 6 \cos 70^\circ + 6 \cos 70^\circ + 6 \cos 0^\circ = 12$$

$$N = 6 \sin 70^\circ + 6 \sin 70^\circ + 6 \sin 0^\circ = 12$$

$$R = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16.97$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{12}{12} = 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

مثال اذا كانت $\vec{a} = 5\hat{i}$ و $\vec{b} = 7\hat{j}$ و $\vec{c} = 5\hat{k}$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ?$$

فان $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \dots$ وحدة قوة

$$\text{أ} \quad 12 \quad \text{ب} \quad 5 \quad \text{ج} \quad 13 \quad \text{د} \quad \sqrt{26}$$

الحل

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 5^2} = 13$$

$$\# \quad 13 = \sqrt{25 + 49 + 25} =$$

مثال اذا كانت $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ و $\vec{c} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ?$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 9\hat{i} - 12\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$\text{ومحصولهم } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ?$$

فان $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \dots$

$$\text{أ} \quad (1-5-1) \quad \text{ب} \quad (1-5-1) \quad \text{ج} \quad (1-5-1) \quad \text{د} \quad (1-5-1)$$

$$\text{أ} \quad (1-5-1) \quad \text{ب} \quad (1-5-1) \quad \text{ج} \quad (1-5-1) \quad \text{د} \quad (1-5-1)$$

الحل

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2+3+4)\hat{i} + (-3-4-5)\hat{j} + (4+5+6)\hat{k} = 9\hat{i} - 12\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 15^2} = 18$$

$$(2+3+4) = 9 \quad (-3-4-5) = -12 \quad (4+5+6) = 15$$

$$(2+3+4) = 9 \quad (-3-4-5) = -12 \quad (4+5+6) = 15$$

$$9 = 3 \times 3 \quad -12 = -3 \times 4 \quad 15 = 3 \times 5$$

$$3 = 3 \times 1 \quad -4 = -3 \times \frac{4}{3} \quad 5 = 3 \times \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{7,0} + \sqrt{37,0} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{7,0} + \sqrt{37,0} = \sqrt{7}$$

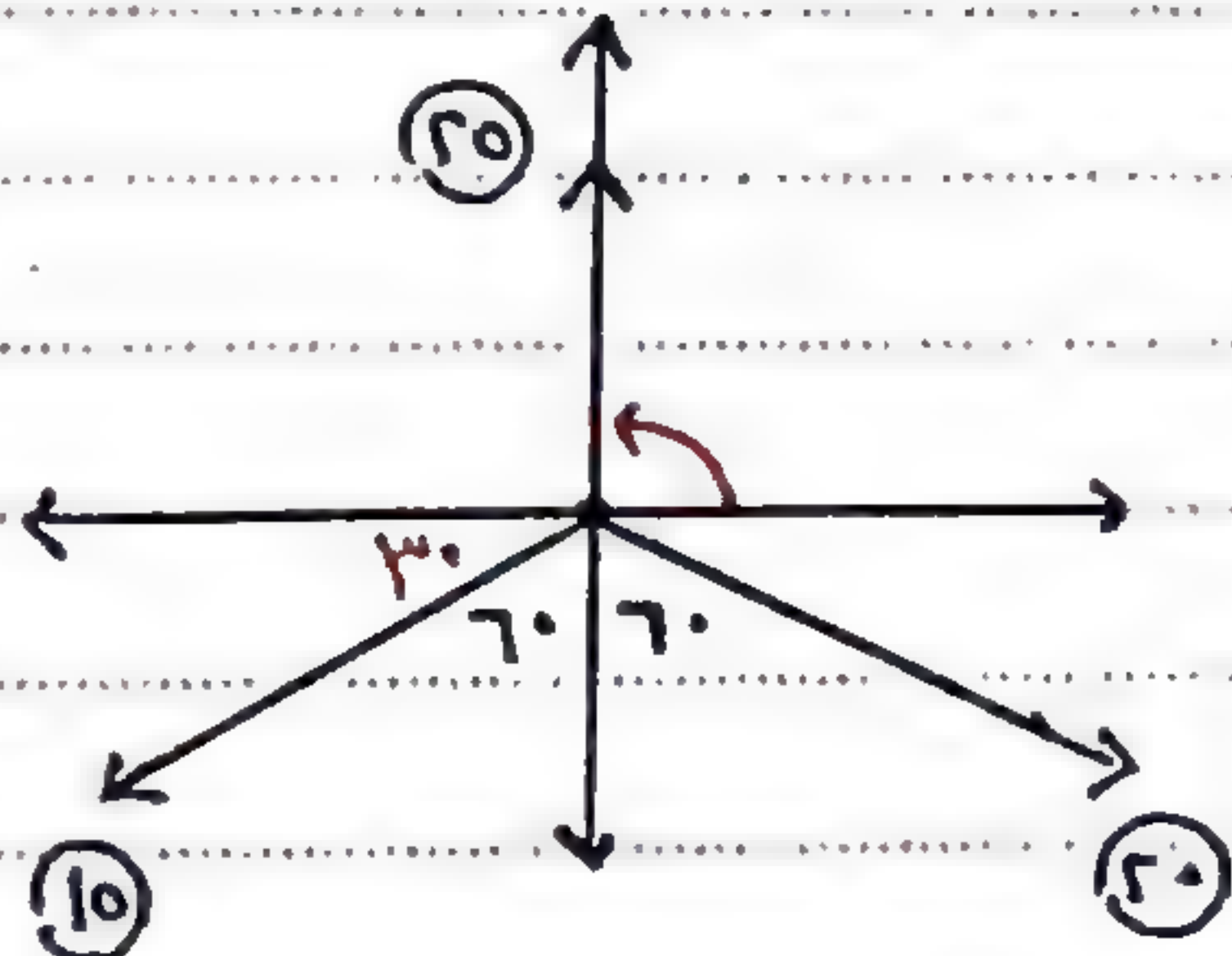
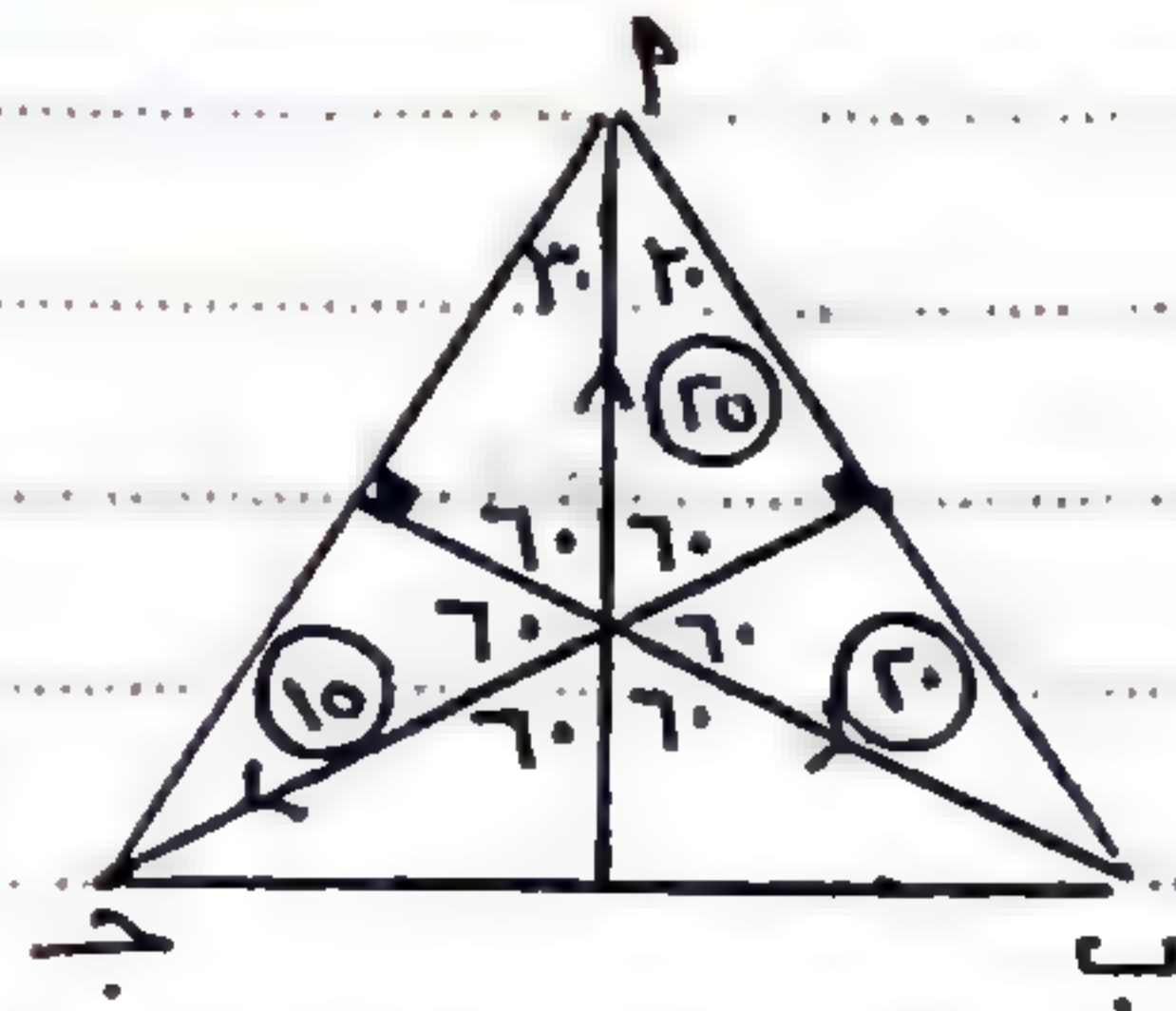
$$\sqrt{37,0} = \sqrt{7}$$

$$\frac{7,0}{37,0} = \frac{7}{37}$$

$$\sqrt{7,0} = \sqrt{7}$$

مثال ٢. ب ج مثلث متساوي الأضلاع
فيه م نقطة تلاقي المتوسطات
أثرت القوى التي مقاديرها ٢٠ ١٥ ٢٥
٢٥ ٢٥ ٢٥ في نقطة مادية في
الاتجاهات م ج ك م ب ك م أ ك
مقطر واتجاهه محصلة هذه القوى.

الحل



$$(20, 0) + (15, -10) + (10, -10) = (30, -20)$$

$$\sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300} = 36,0$$

$$\sqrt{37,0} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300} = 36,0$$

$$\sqrt{7,0} = \sqrt{7}$$

مثال ٢ ب ح ٢ مربع طول ضلعه ١٢ اسم

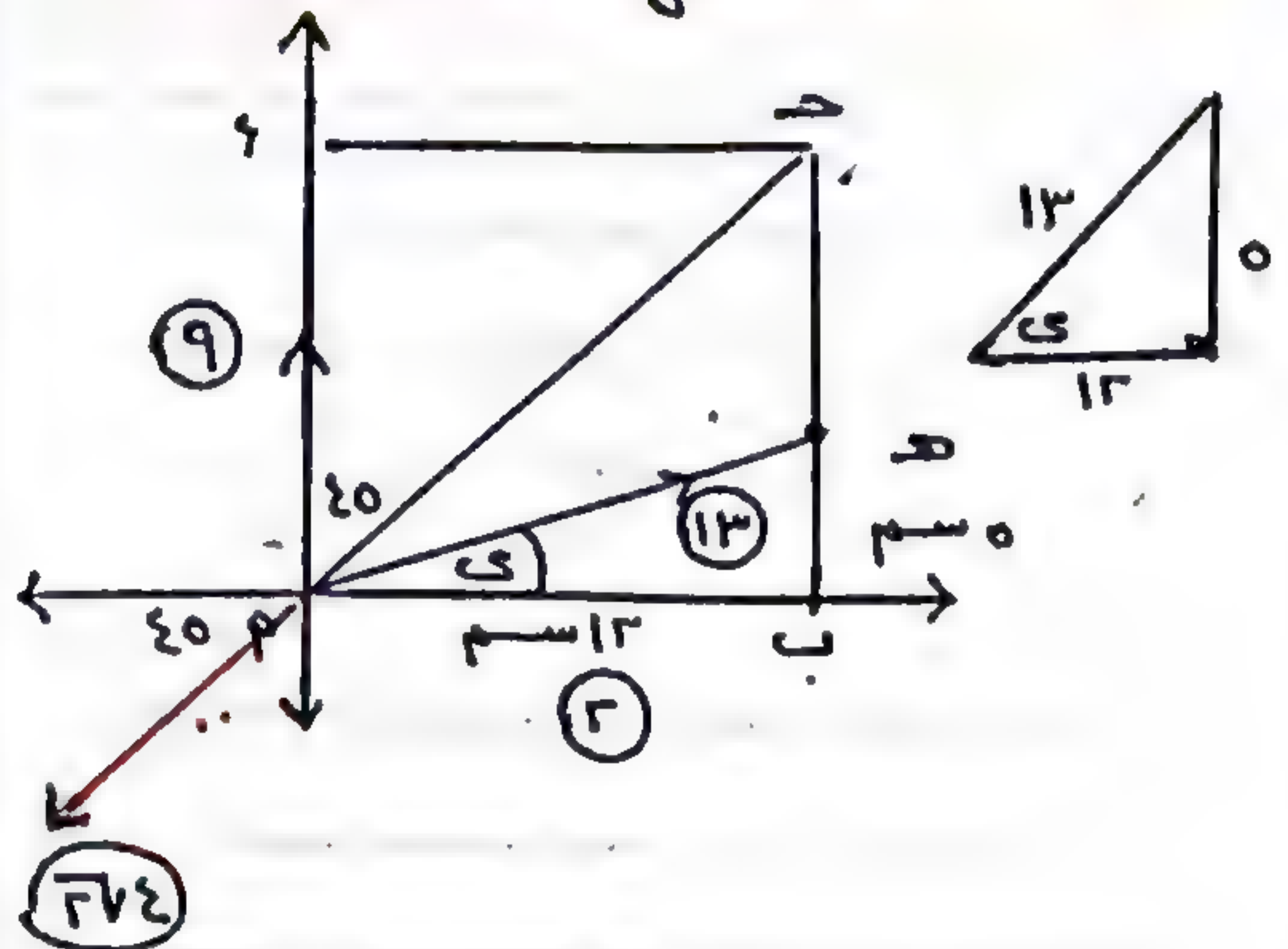
ه د ب ج بحيث ب ه = سم أثرت

قوى مقاديرها ٢ ١٣ ٩٦ ٢٧٤ ٩٦ سم. ت. ج. م.

في الاتجاهات ب ب ٢ ه ٢ د ٢ م ٢ ٩٦

علم الترتيب أو جد محصلة هذه القوى

الحل



$$(0.53) \text{ و } (13 \text{ و } 96) \text{ و } (274 \text{ و } 250)$$

$$(9.59)$$

$$\text{سم} = 2 \text{ حيا} + 13 \text{ حيا} + 96 \text{ حيا} + 250$$

$$+ 9 \text{ حيا} = 9 + 2 + 13 + 96 + 250 = 460$$

$$\text{سم} = 2 + 13 + 96 + 250 = 460$$

$$\text{سم} = 2 - 13 = -11$$

بالمثل

$$\text{سم} = 10 \text{ احسبها انت تفهم}$$

$$\text{ح} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10 \text{ سم. ت. ج. م. #}$$

$$\text{خطم : حيا} (250) = \text{حيا} (180 + 250) = - \text{حيا} 20$$

$$\text{ح.} (250) = \text{ح.} (180 + 250) = - \text{ح.} 20$$

مثال ٢ ب ح ٢ مستطيل فيه ب ه = ٨ سم

ب ج = ٦ سم و د ه = ٦ سم بحيث

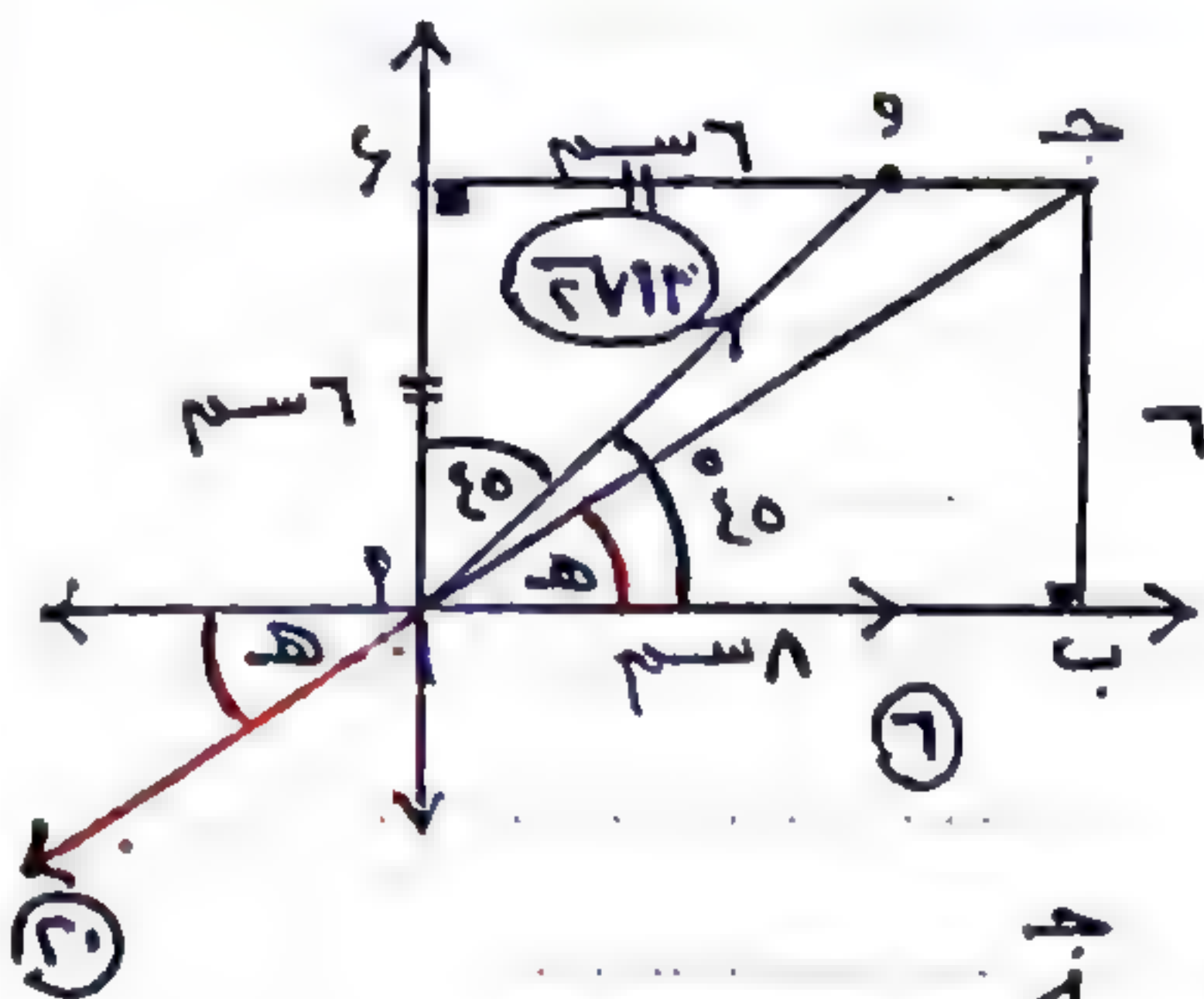
و ٦ = ٦ سم أثرت القوى المتساوية

مقاديرها ٢ ١٣ ٩٦ ٢٧٤ ٩٦ نيوتن

في ب ب ٢ ج ٢ د ٢ م ٢ و ٩٦ علم الترتيب

أو جد مقدار واتجاه المحصلة؟

الحل



$$\frac{7}{1} = \text{حاه}$$

$$\frac{1}{1} = \text{حيا}$$

$$(0.56) \text{ و } (13 \text{ و } 96) \text{ و } (274 \text{ و } 180) \text{ و } (250)$$

$$(9.56)$$

$$\text{سم} = \text{حل بنفسك}$$

$$\text{سم} = \text{حل بنفسك}$$

$$\text{ح} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} \text{ نيوتن}$$

$$\text{طاه} = \frac{3}{4} \therefore \text{ه} = 20$$

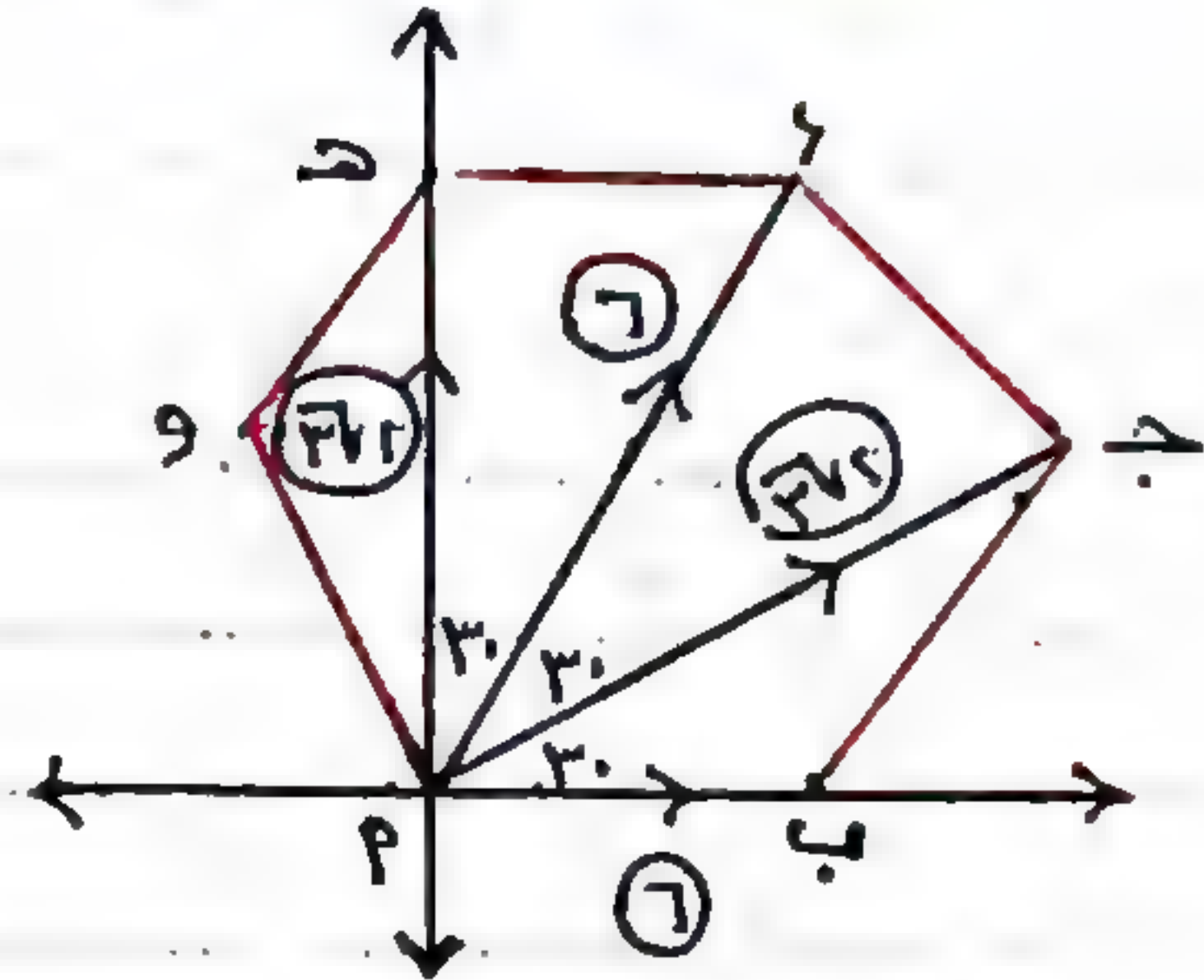
$$\text{خطم : حيا} (180) = \text{حيا} (180 + 250) = - \text{حيا} 70$$

$$\text{ح.} (180) = \text{ح.} (180 + 250) = - \text{ح.} 70$$

$$\text{لما ه} = \frac{٣٦٦}{١٢} = \frac{٣١}{٣} = \text{س} \quad [\text{س} + \text{ص} + \text{ح}]$$

$$\therefore \text{ه} = ٤٠' ٥٣'' \quad \#$$

مثال ب ح د ه و شكل سداسي
منتظم اُثرت قوتها مقاديرها ٣٦٢٥٦
٣ ٦ ٥ ٦ ٣ ٥ سوتن فاه ب ب س ب ب
٣ ٥ ٣ ٥ ٣ ٥ ه ه ه ه ه ه
مقدار واتجاه المحصلة ؟
الحل



$$\begin{aligned} & (٠.٥٦) \text{ س} + (٣.٥٦٢) \text{ ه} + (٦.٥٦) \text{ و} \\ & (٠.٩٠٥٦٢) \text{ س} \end{aligned}$$

$$\text{س} = ٦ \text{ ح} + ٣٦٢ \text{ ح} + ٣٠ \text{ ح}$$

$$+ ٩٠ \text{ ح} + ٣٦٢ \text{ ح} + ٩٠ \text{ ح}$$

$$= ١٢$$

$$\text{ص} = ٦ \text{ ح} + ٣٦٢ \text{ ح} + ٣٠ \text{ ح}$$

$$+ ٩٠ \text{ ح} + ٣٦٢ \text{ ح} + ٩٠ \text{ ح}$$

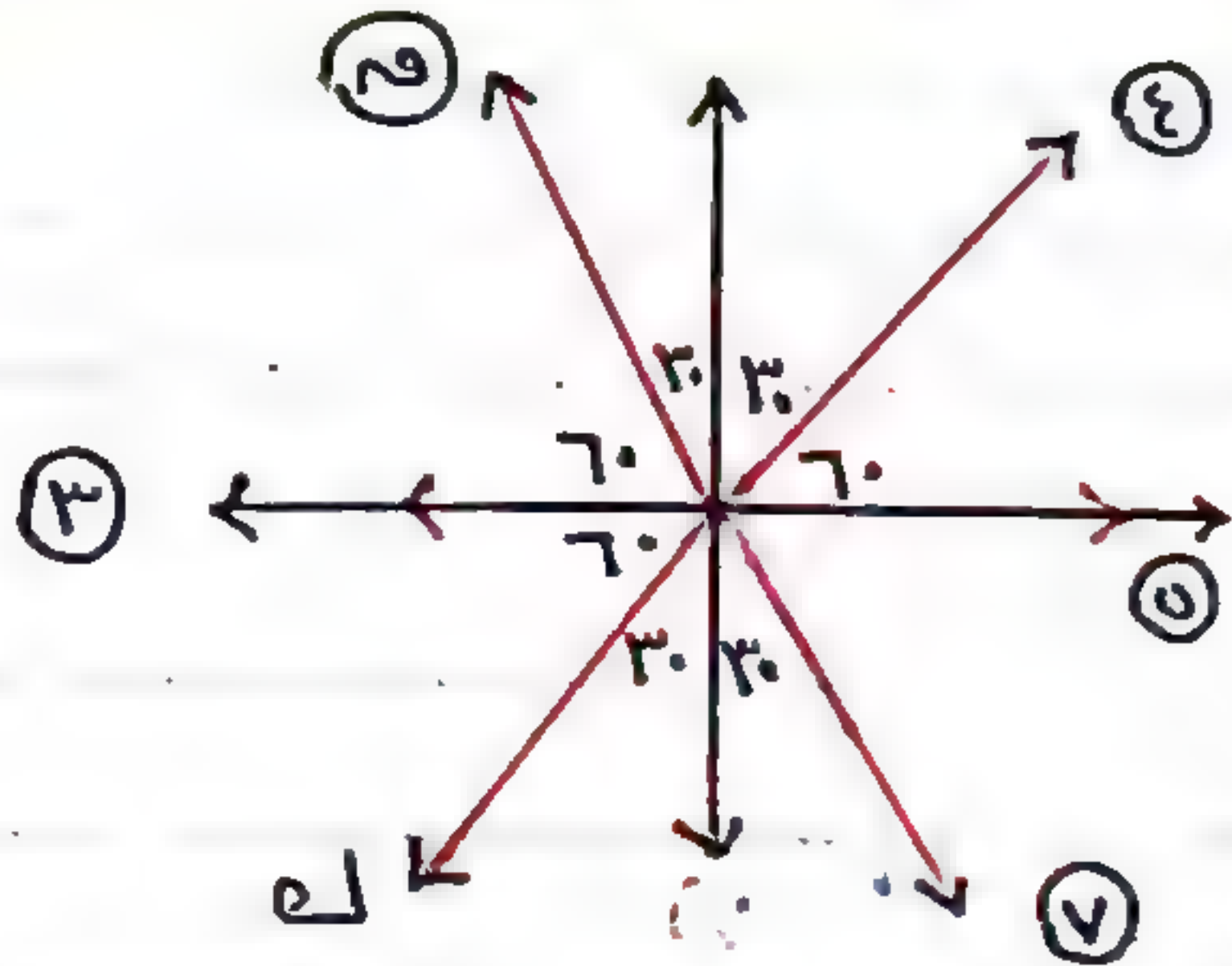
$$= ٣٦٦$$

$$\text{ح} = \sqrt{٣٦٦^2 + ١٢^2} = \sqrt{١٣٤٤ + ١٠٨} = \sqrt{١٤٥٢}$$

$$\text{ح} = \sqrt{١٤٥٢} = ٣٨ \text{ سوتن}$$

مثال أثبت القول المستوي ٥٤٦٥
 ٥ ٣ ٤ له ٧٤ يوتنل فم نقطة مادية
 والزاوية بين كل قوتين متاليتين ٦٠° اوجد
 قيمة ٥ له التي تجعل المجموعة متزنة

الحل



$$\begin{aligned} & (0.50) \text{ و } (6.54) \text{ و } (12.59) \text{ و } (18.62) \\ & \text{ و } (24.54) \text{ و } (31.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥ \text{ حيا} + \dots + ٧ \text{ حيا} &= ٣ \\ ٥ \text{ حا} + \dots + ٧ \text{ حا} &= ٢ \end{aligned}$$

هو قال التي تجعل المجموعة متزنة

$$\therefore ٥ = ٣ \leftarrow \dots \leftarrow ١٥ = ٥ + ١٠$$

$$\therefore ٥ = ٣ \leftarrow \dots \leftarrow ٣ = ٥ - ٢$$

بجمع ① و ②

$$\therefore ١٨ = ٣ \dots \therefore ٩ = ٣ \text{ يوتنل}$$

عو من فم للمادلة ①

$$٩ + ٥ = ١٥ \therefore ٥ = ٦ \text{ يوتنل}$$

مثال اذا كان :

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\text{وكانت } \vec{c} = (10, 3, 2, 1, 0)$$

اوجد قيمته ٥ ب

الحل

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$$

لكن \vec{c} فم الصورة المطبقة لـ ٣

نحولها للصورة الاحداثية

$$\vec{a} = 10 \text{ حيا} = 10$$

$$\vec{a} = 10 \text{ حا} = 10$$

$$(10, 3, 2, 1, 0) = (10, 3, 2, 1, 0)$$

$$10 = 9 + 1$$

$$10 = 9 + 1$$

مثال اذا كان $\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

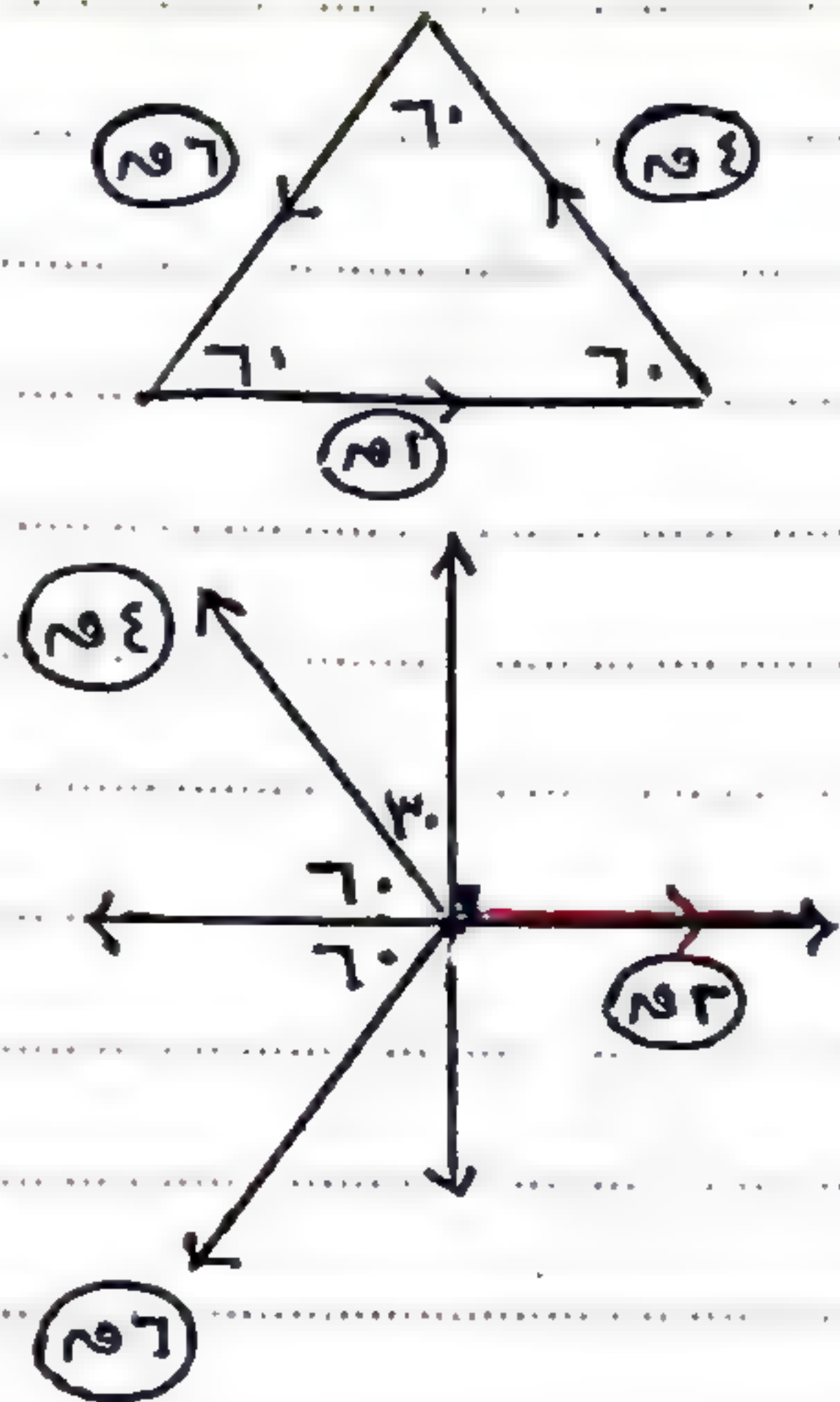
الحل

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} = 17 + 9 = 26 \text{ وحدة قوة}$$

مثال ثلاث قوى مقاديرها ٢٠ ن ، ٤٠ ن ، ٦٠ ن تؤثر في نقطة مادية في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع مأخوذة في ترتيب دوراك واحد أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحل



$$٢٠\text{ ن} (٠.٥^\circ) \text{ و } ٤٠\text{ ن} (١٢٠.٥^\circ) \text{ و } ٦٠\text{ ن} (٢٤٠.٥^\circ)$$

$$\text{ن} = ٢٠\text{ ن} \cdot \cos ٠ + ٤٠\text{ ن} \cdot \cos ١٢٠ + ٦٠\text{ ن} \cdot \cos ٢٤٠$$

=

$$\text{ن} = ٢٠\text{ ن} \cdot \cos ٠ + ٤٠\text{ ن} \cdot \cos ١٢٠ + ٦٠\text{ ن} \cdot \cos ٢٤٠$$

=

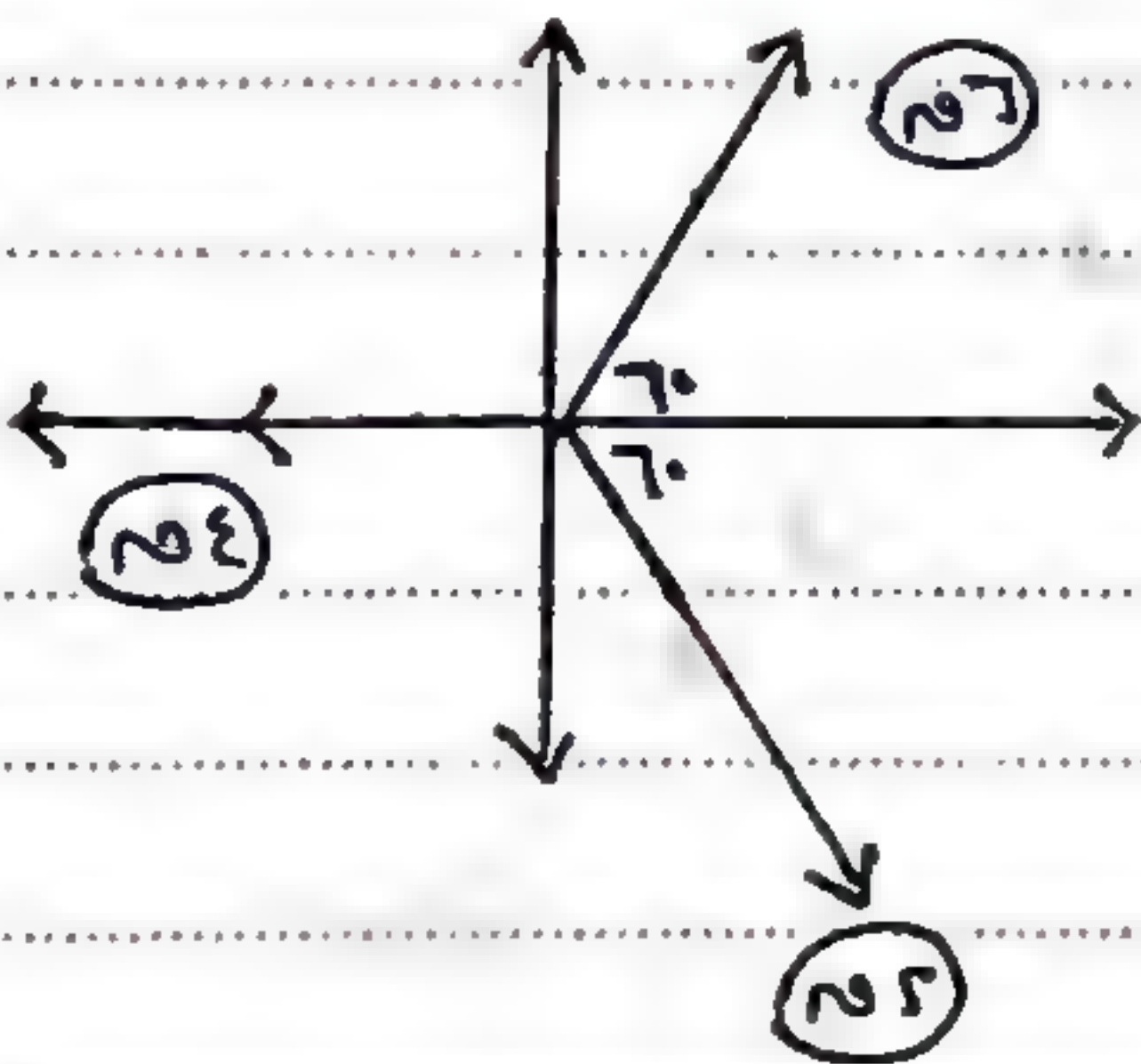
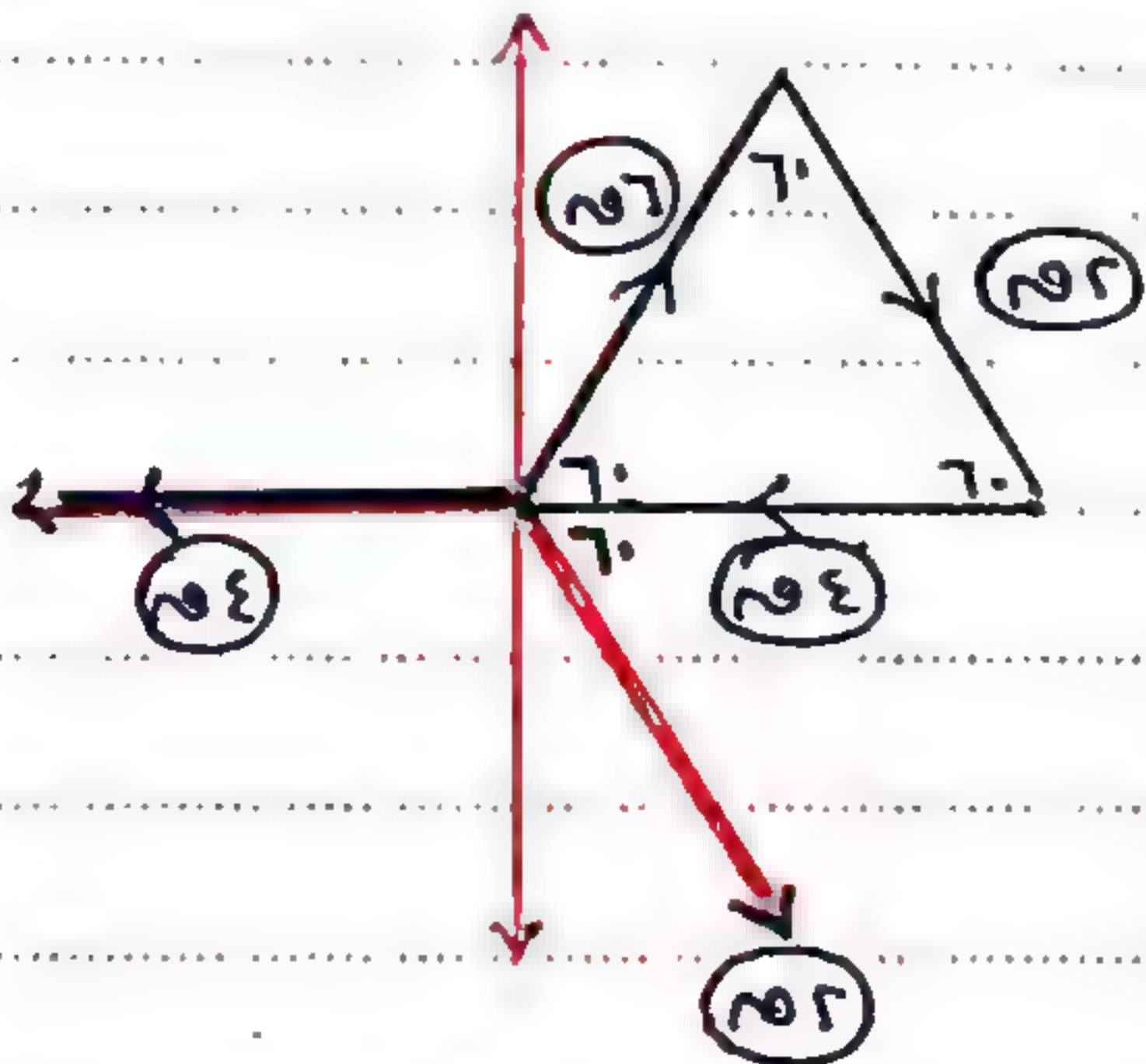
$$\text{ن} = ٢٠\text{ ن} + ٤٠\text{ ن} + ٦٠\text{ ن} = ١٢٠\text{ ن}$$

$$\text{طاه} = \frac{١٢٠}{٣}$$

$$\text{ده} = ٤٠\text{ ن} = \#$$

المثال ده ليك حل انت اعمل
اذا هرتا حلح بفاس

حل آخر



$$٢٠\text{ ن} (٠.٥^\circ) \text{ و } ٤٠\text{ ن} (١٢٠.٥^\circ) \text{ و } ٦٠\text{ ن} (٢٤٠.٥^\circ)$$

كامل انت بكم يا غالك

۶ ل منتصف تا ج ۶ م منتصف ح ۶

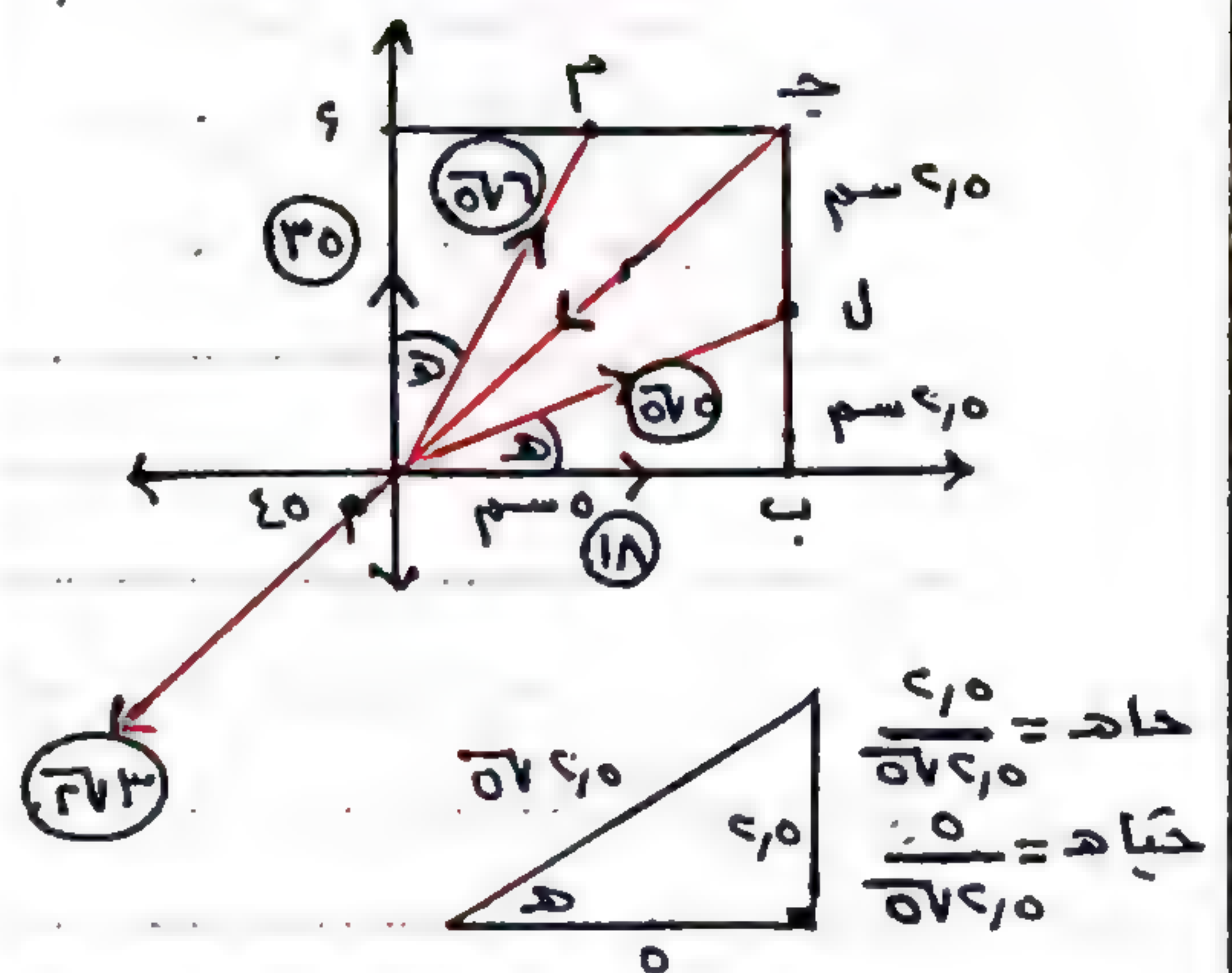
٣٥٩ نيوتن، فمقطعة مادية فمواجهات

$\text{Pde} \xleftarrow{\quad} \text{P} \xleftarrow{\quad} \text{P} \xleftarrow{\quad} \text{P} \xleftarrow{\quad} \text{P} \xleftarrow{\quad} \text{P}$

الترتيب اوجد مقدا والجاه محصلة

هذه القوالب؟

الحل



$$(\sin \theta) \cdot 5 \cdot (\sin \theta)$$

(২-৭.৫.০৭৭)

(9.535)

(550 5774)

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

٥٧٦ حيا. (٩٠-٥) + ٣٥ حيا. ٩٠

...cro. ح ف ر +

$$س = 18 + \frac{0}{\sqrt{210}} \times \sqrt{50} + \frac{1}{\sqrt{21}} \times \sqrt{3} + 0 \times 30$$

$$\frac{r_{10}}{\sqrt{r_{10}}} = 2.12$$

$$F_1 = Z \therefore$$

بالمنطق

$$+ 200 + 100 = 300$$

$$\frac{c_{10}}{\sqrt{c_{10}}} \times \sqrt{v_0} + \cdot \times 11 = 20$$

$$1750 + \frac{1}{2} \times 175 + \frac{1}{2} \times 175$$

$$\frac{0}{0.910} = \text{جٹا}$$

$$39 = 20 \therefore$$

$$2 = \sqrt{15+63}, \sqrt{137} = \sqrt{15+122}$$

$$-90 = 0 \quad 2/3 = 1/2$$

$$\# \dots \circ \vee \dots \xi_1 = 0 \therefore$$

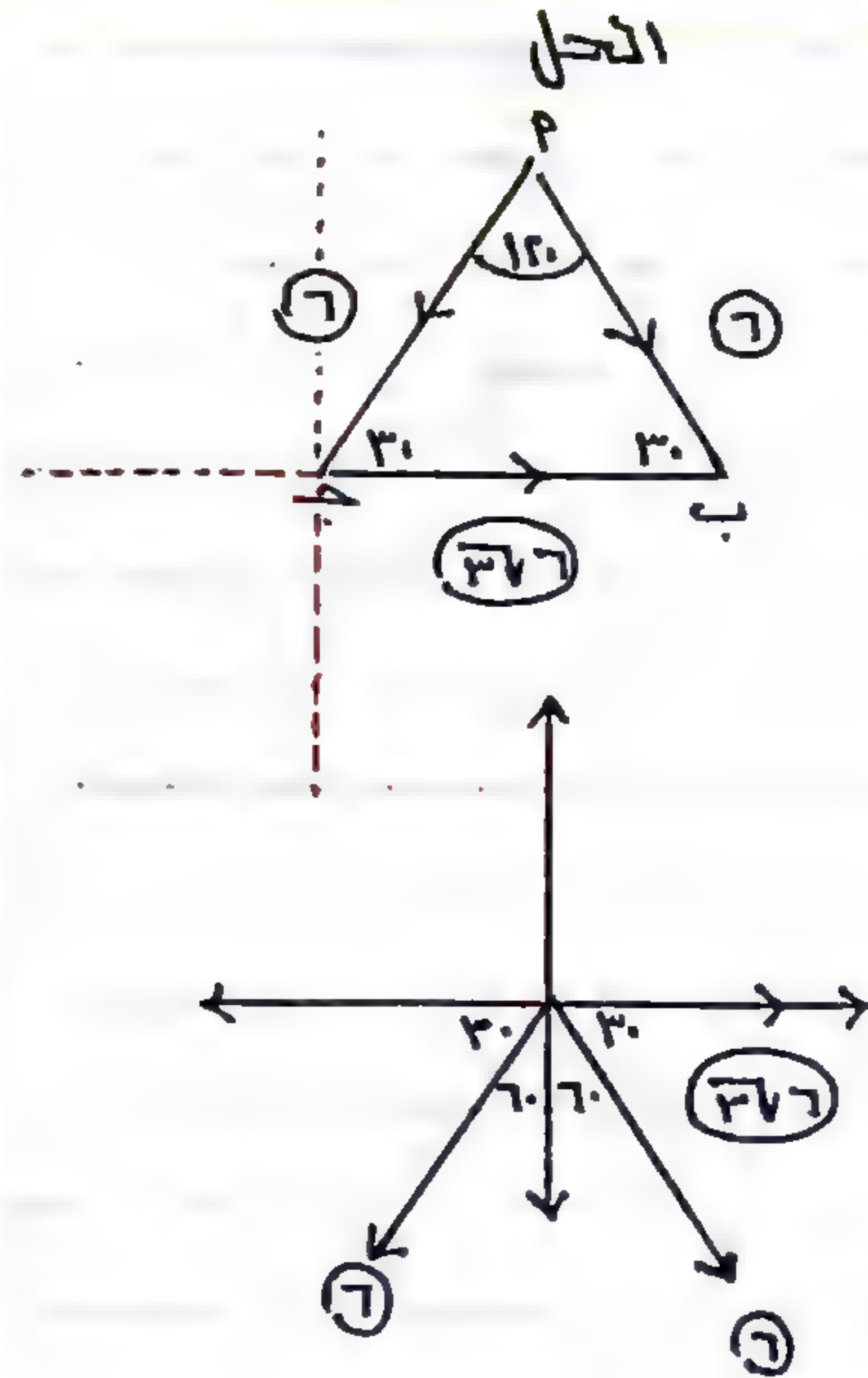
$$٢ = \sqrt{٣٦٦ + ١٢} = ١٢ \text{ نيوتن}$$

$$\text{لها} = \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} \text{ [س٢ ص٢]}$$

$$\text{الزاوية تقع في الربع الرابع}$$

$$\therefore \text{ه} = ٣٦٠ - ٣٣٠ = ٣٠^\circ \quad \#$$

مثال ب د ه مسار السائق فيه
 ه (١٢٠ = ١٢٠°) أثرت القوة التي مقاديرها
 ٦ ٦ ٣٦٦ ٦ نيوتن في نقطة مادية
 في الاتجاهات توازي \vec{AB} و \vec{AC}
 و \vec{AD} على الترتيب انكبت في مقدار
 المحصلة = ١٢ نيوتن في اتجاه \vec{AB}



$$١٢ = ٣٦٦ + ١٢ \quad (١٢٠^\circ) \quad (٣٦٦) \quad (١٢٠^\circ)$$

$$\text{س} = \text{حل بنفسك} = ٣٦٦$$

$$\text{ص} = \text{حل بنفسك} = ٦$$

④ الإرتزان :

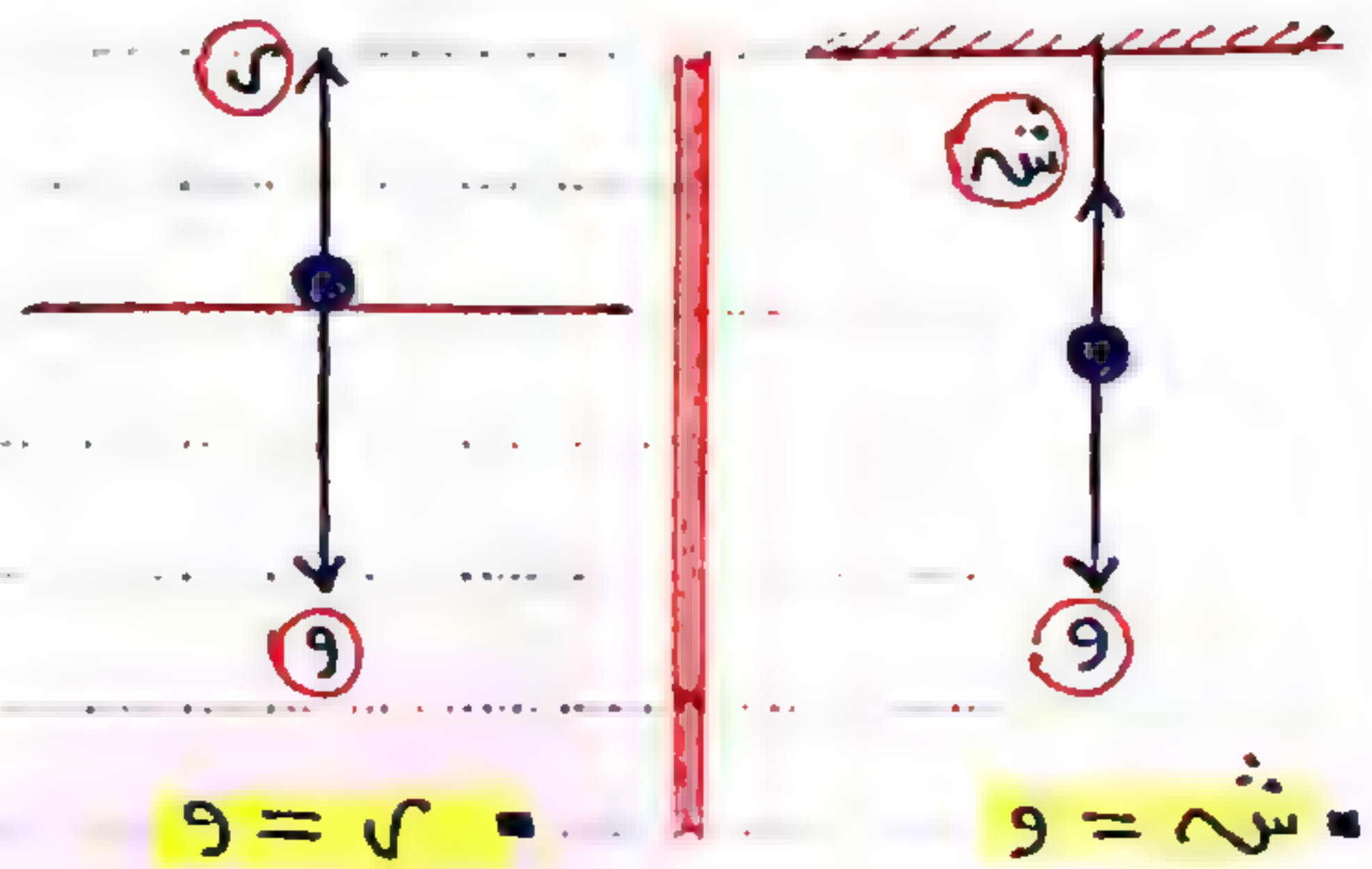
← أولاً الاتزان تحت تأثير قوتان :

شروط اتزان جسم تحت تأثير قوتان أن تكون القوتان :

- مساويتان في المقدار ← $(F_1 = F_2)$
- متضادتان في الاتجاه ← $(F_1 = -F_2)$
- خطيهما على استقامة واحدة .

مثال على الاتزان تحت تأثير قوتان :

س جسمان أحدهما على نفث أفقي والآخر معلق بخيط خفيف .



حيث :

ش ← الشد في الحبل

و ← وزن الجسم

س ← رد فعل الجسم على النفث

ملاحظات هامة :

- إذا كانت البكرة حرة فأن الشد في ذراع الحبل يكونان متساويين .

← ثانياً الاتزان تحت تأثير ثلاث قوى :

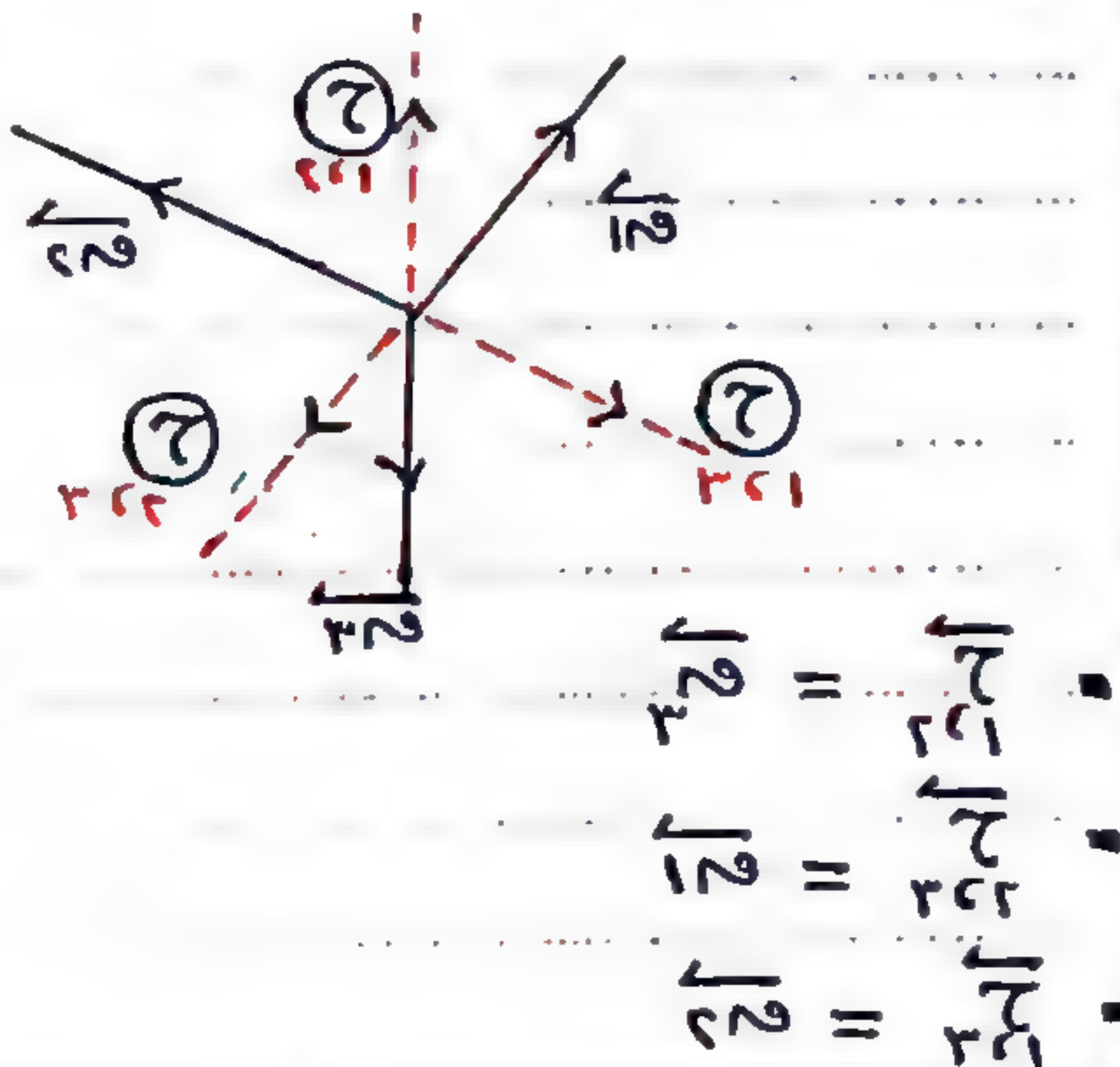
قاعدة ① :

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بمثلث متساوي الأضلاع فأنه يكون متزن .

خطر :

• لكي تنزل القوى الثلاث يجب أن تكون أكبر قوة أصغر من (مجموع القوتين الأخرتين)

• إذا اتزان الجسم تحت تأثير القوى الثلاث فإن :
المتصلة بين أي قوتين تساوي القوة الثالثة مقداراً ومضادة لها في الاتجاه ولها نفس خط العمل

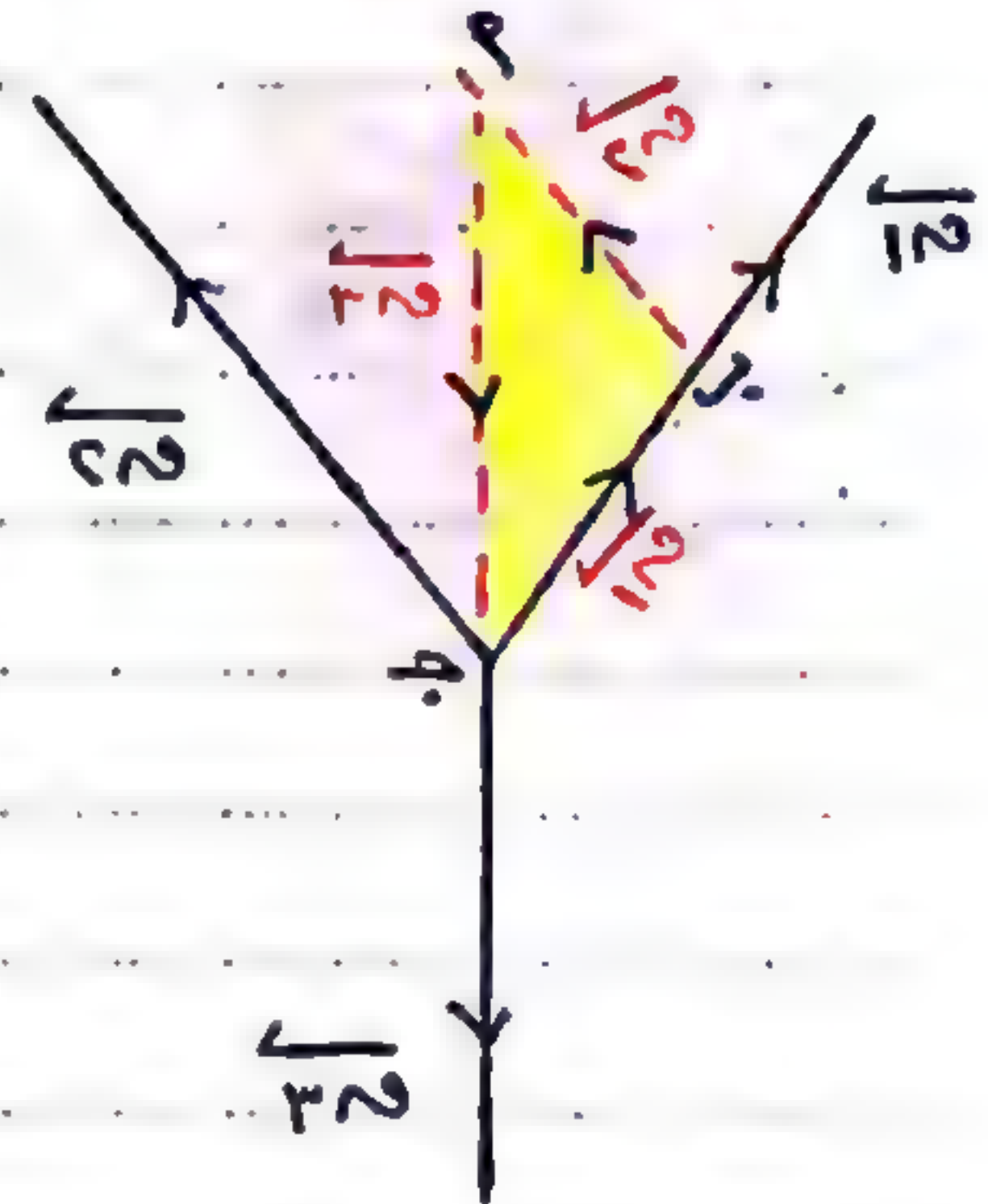


$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_2 &= F_3 \\ F_3 &= F_1 \end{aligned}$$

قاعدة ٢ :

■ قاعدة مثلث القوى :

ع اذا اثرن جسم جاسه تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى .
وهو اتجاه دورهم واحد فان أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة .



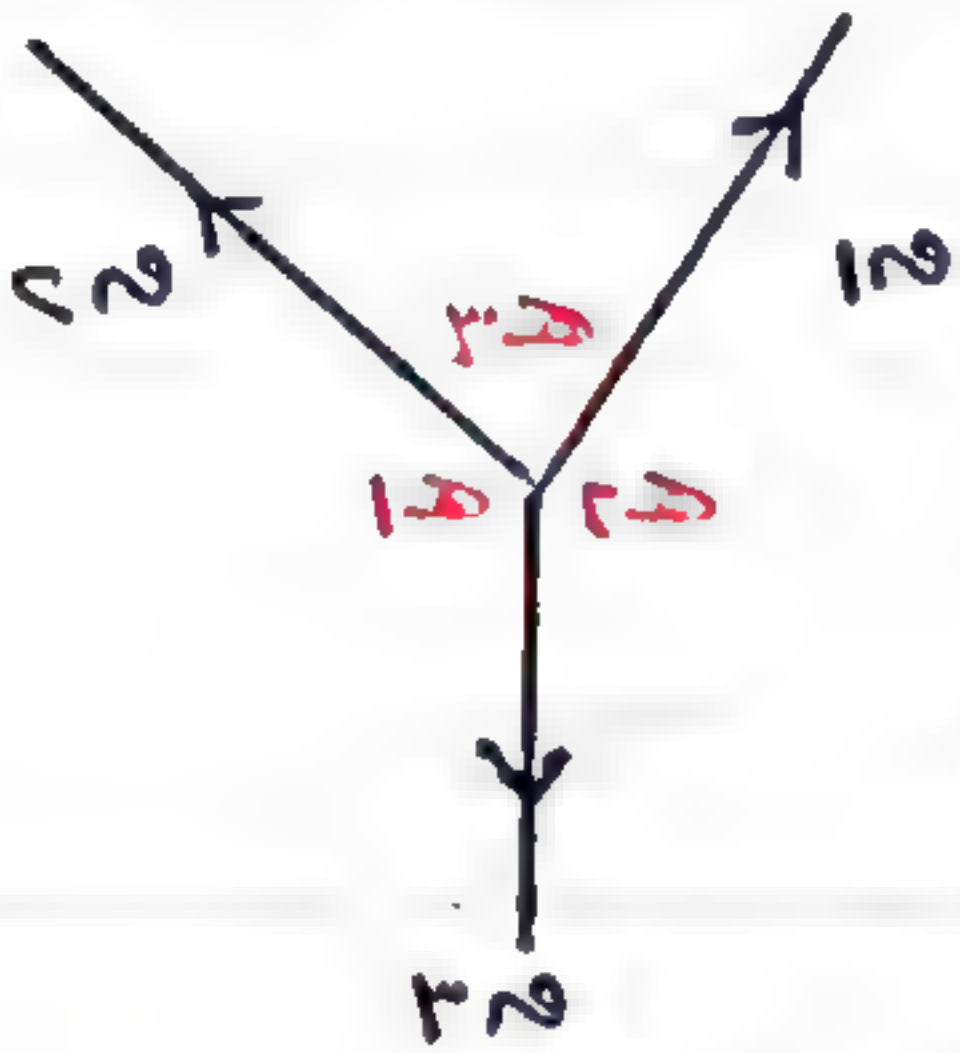
$$\therefore \frac{1N}{a} = \frac{2N}{b} = \frac{3N}{c}$$

- مركزيا قلبه المثلث من قاعدة مثلث القوى لما يكون المثلث مقيس فيه غير أطوال أضلاعه فقط مقيس أوايا خالص ولازم يكون ممانا الاضلاع الثلاثة .
- المثلث المثلث هو مثلث القوى .

قاعدة ٣ :

■ قاعدة لا هـ :

ع اذا اثرن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة فان مقدار كل قوة تناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرى :



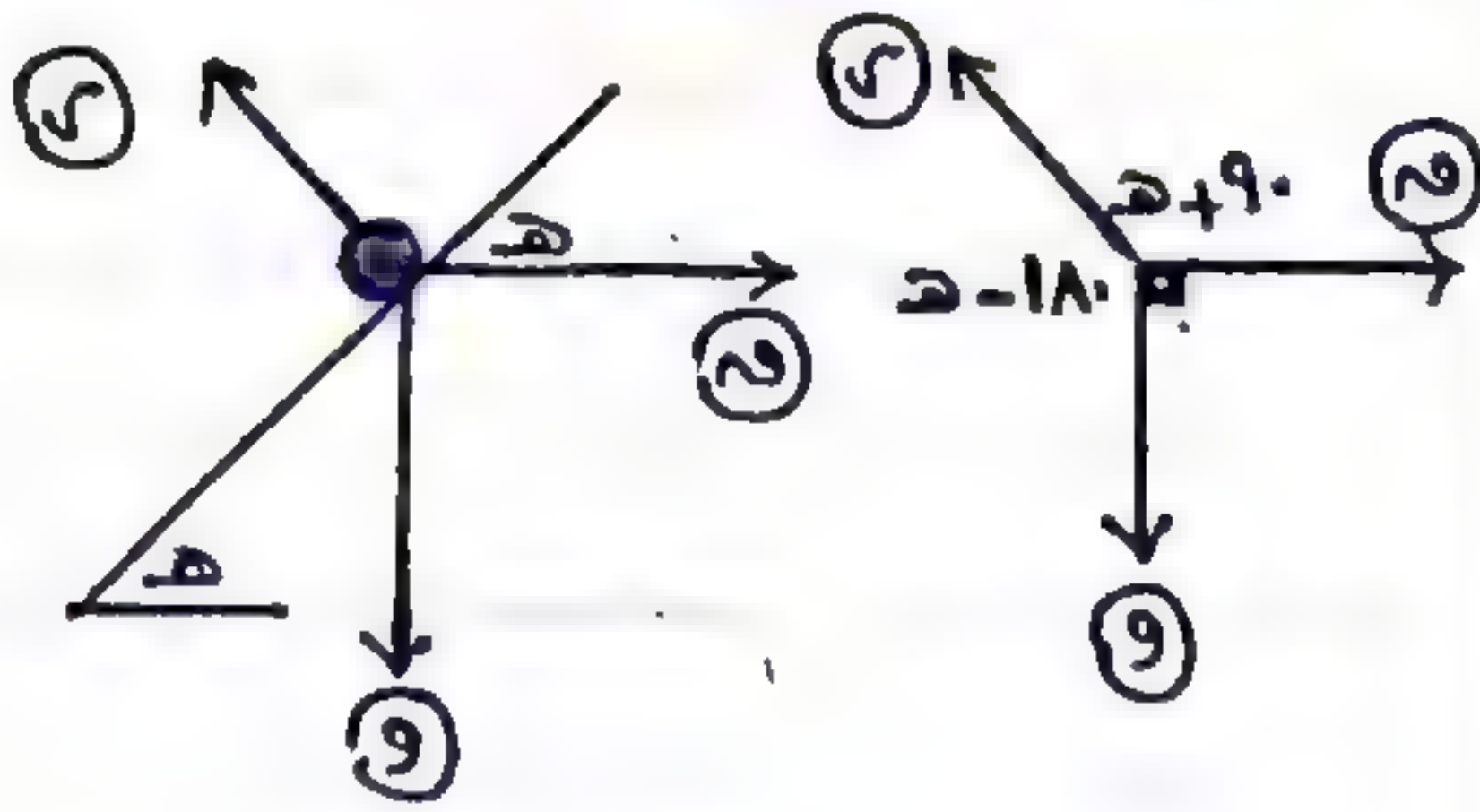
$$\therefore \frac{1N}{\sin 120} = \frac{2N}{\sin 120} = \frac{3N}{\sin 120}$$

■ مركز في الحاجات الآتية :

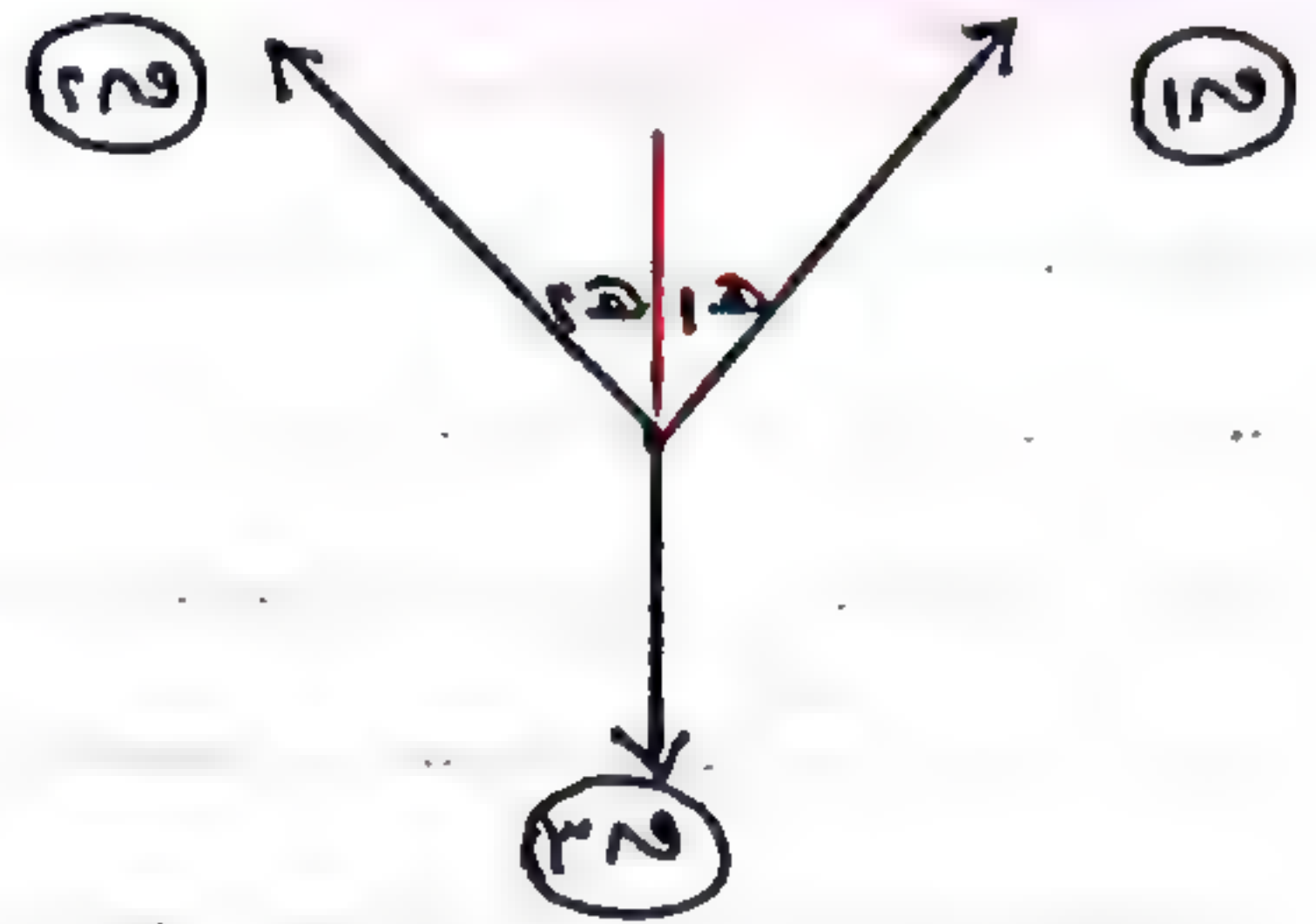
- ع جا (١٨٠ - هـ) = جا هـ
- جتا (١٨٠ - هـ) = - جتا هـ
- ظا (١٨٠ - هـ) = - ظا هـ

- ع جا (٩٠ + هـ) = جتا هـ
- جتا (٩٠ + هـ) = - جا هـ
- ظا (٩٠ + هـ) = - ظا هـ

٢) القوة الأفقية

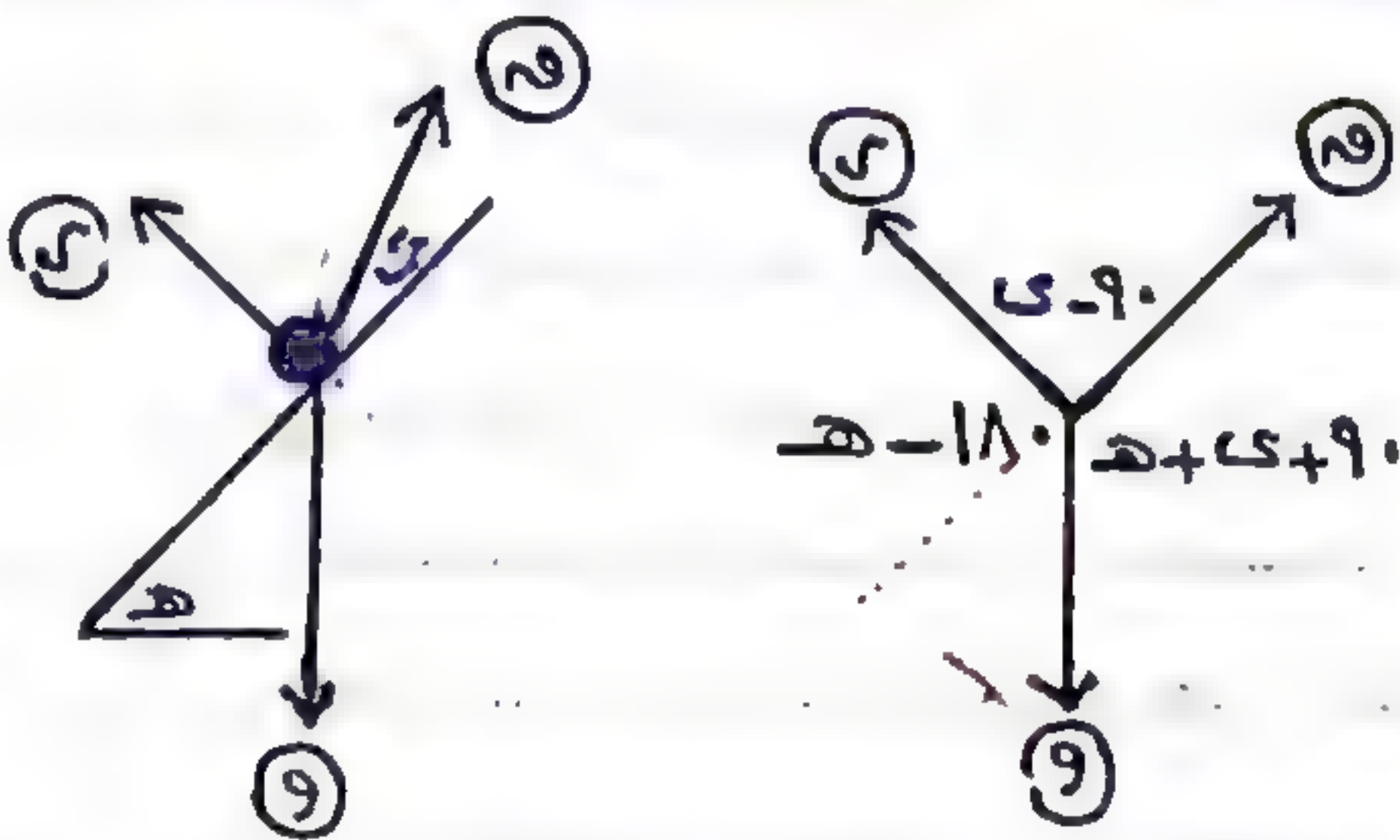


■ إذا مُد خط عمل أحد القوى الثلاثة ليُقسم الزاوية بين خطي عمل القوتين الأخرتين إلى زاويتين هذه الحالة حالة خاصة لقاعدة لاملا



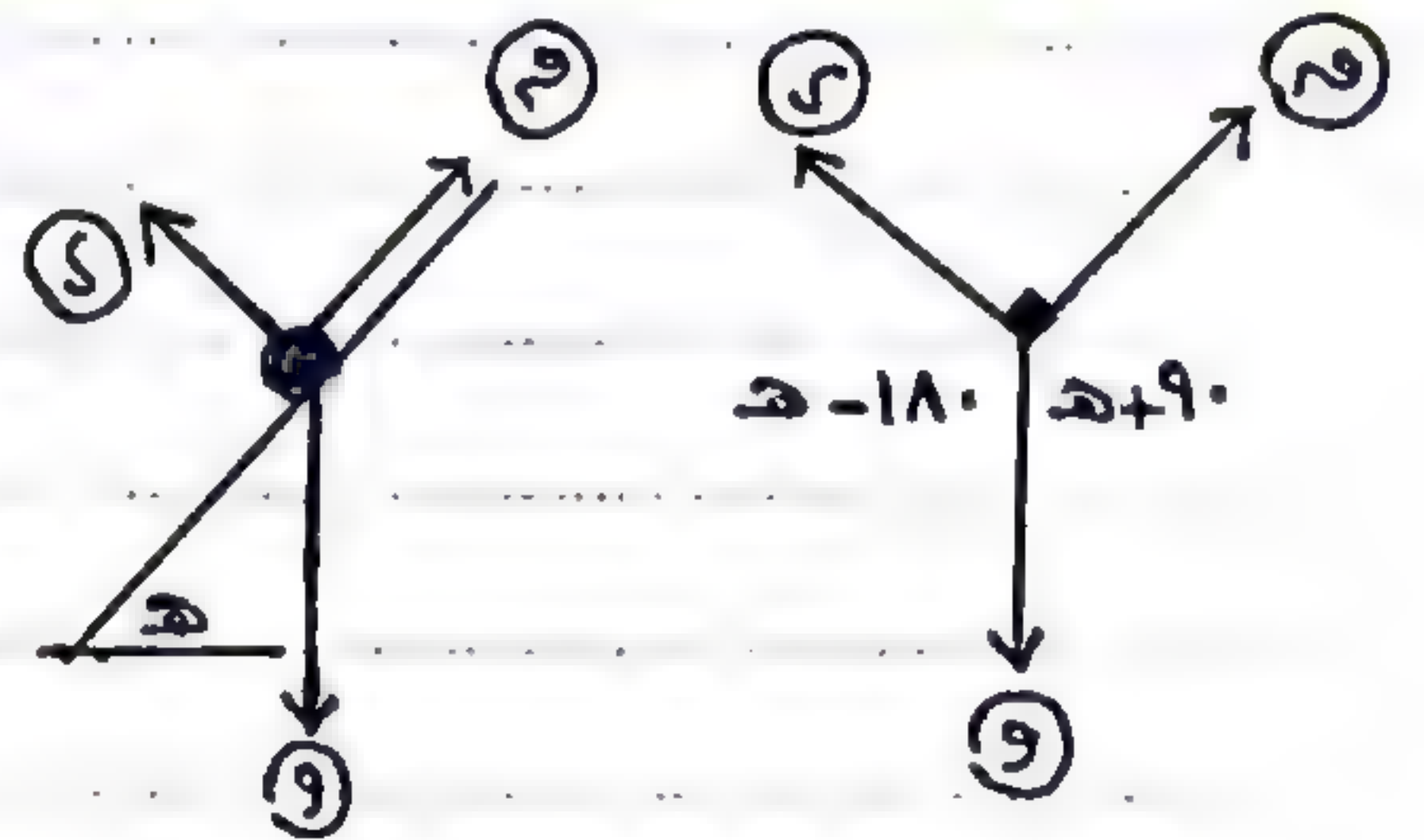
$$\frac{3h}{\text{حاجه}} = \frac{2h}{\text{حاجه}} = \frac{1h}{\text{حاجه}}$$

٣) القوة مائل بزاوية. لأعلى



■ مُلخص لحالات المستويات المائل الأملس

١) القوة في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى



ملاحظات غاية في الأهمية:

■ أقل عدد من القوى المستوية المتساوية في المقدار والتي يمكن أن تتزن تساوي ٢

■ أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية في المقدار والتي يمكن أن تتزن تساوي ٣

خاصة: قاعدة مثلث القوى الممودلة
كل قوة تتناسب مع طول الضلع الممودلة
عليه.

مثال إذا اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى
مستوية متلاقية في نقطة مقاديرها
٣ ٥ ٦ نيوتن فأوجد قياس الزاوية
بين القوسين الأولين؟

الحل

$$٣ = ١٨ \quad ٥ = ٢٥ \quad ٦ = ٣٠$$

$$٧ = ٢٥ = ٣٠$$

$$٣٠ + ٢٥ + ١٨ = ٧٣$$

$$٣٠ + ٢٥ + ٩ = ٦٤$$

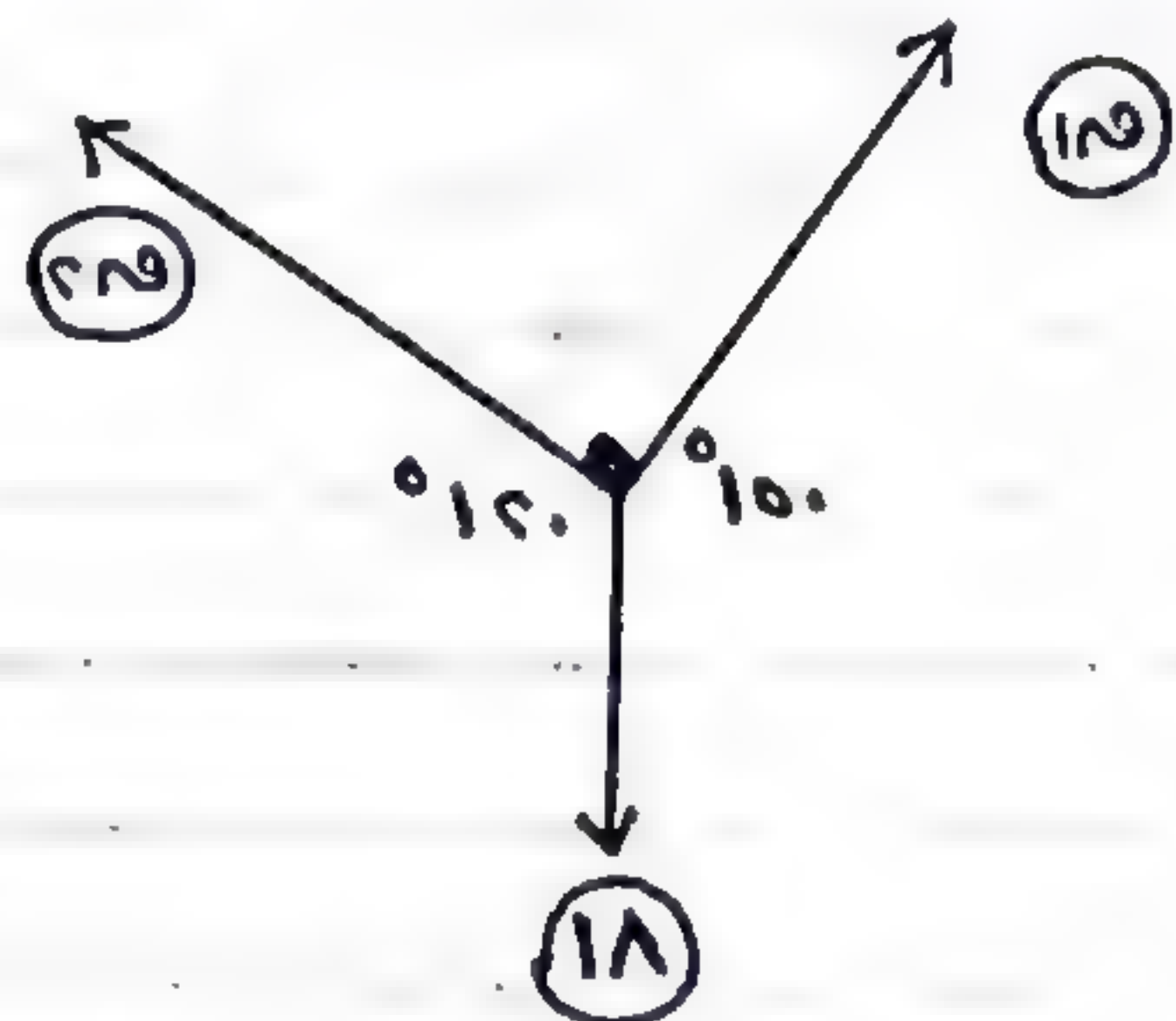
$$٣٠ = ٦٤$$

$$\frac{١}{٢} = ٦٤$$

طبعاً ممكن طاليف متميز بحسب ٣٦٢
أو ٣٦١ بس كذا

مثال ثلاث قوى مستوية مقاديرها
١٨ ٢٥ ٣٠ نيوتن متلاقية في نقطة
واحدة ومترتبة فإذا كان قياس الزاوية
بين خطي القوسين الأول والثاني
٩٠° وبين الثاني والثالث ١٢٠° أوجد
٢٥ ٣٠ ١٨

الحل



قاعدة لامر

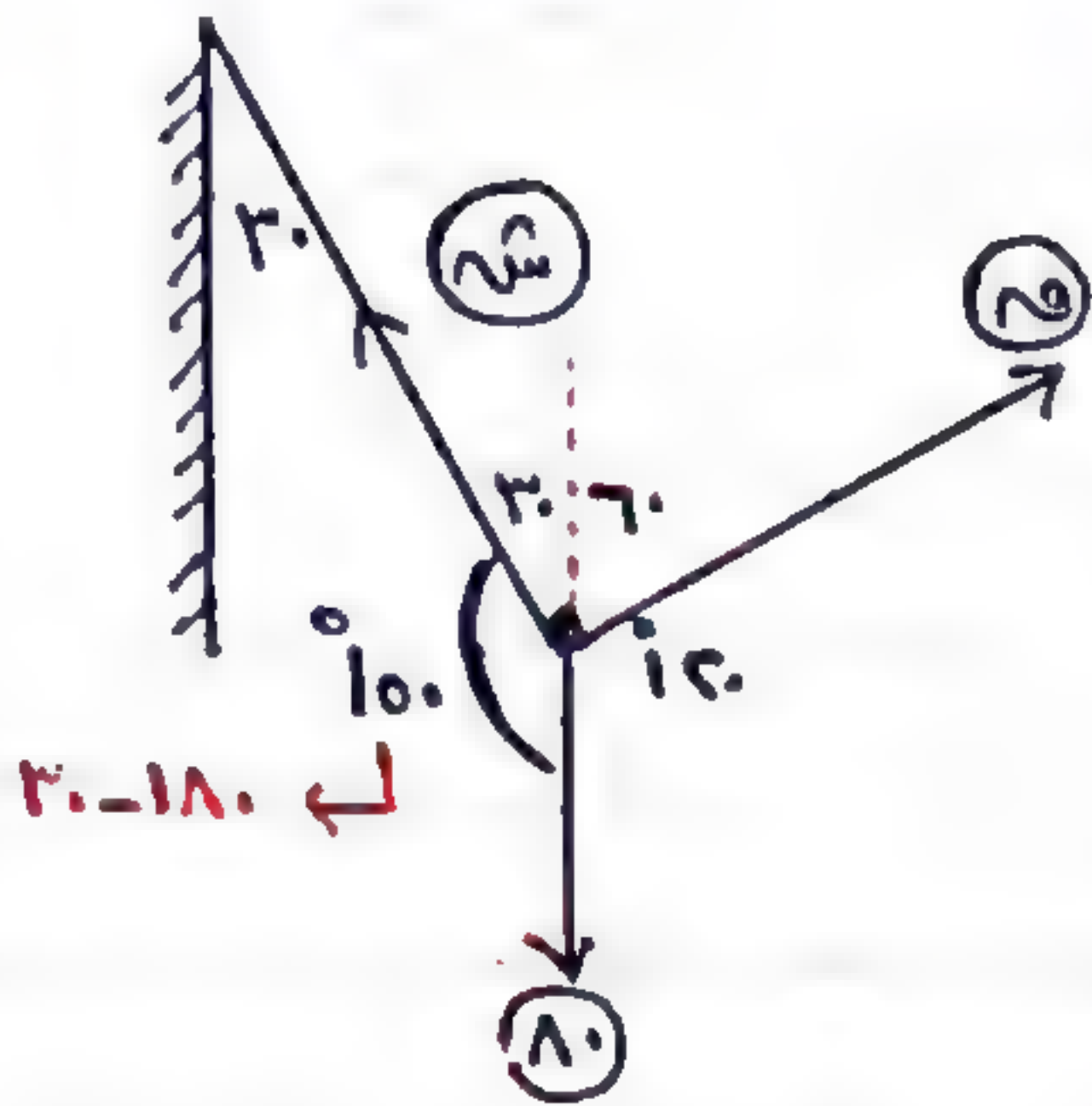
$$\frac{١٨}{٩٠} = \frac{٢٥}{١٥٠} = \frac{٣٠}{١٢٠}$$

$$١٨ = \frac{١٢٠ \times ١٨}{٩٠} = ٢٤$$

$$٢٥ = \frac{٩٠ \times ٢٥}{١٢٠} = ١٨.٧٥$$

مثال علقت ثقل مقدار ٨٠ نيوتن في طرفه حيث مشيت طرفه الآخر في حائط رأسه ٢ أزيح الثقل بقوة عمودية على الحيط حتى أصبح مائلاً على الحائط بزاوية ٣٠° أوجد مقدار القوة والسد في الحيط؟

الحل



• لا يمكن يا لامي (الحالة العامة)

$$\frac{80}{9.8} = \frac{20}{12.8} = \frac{20}{10.8}$$

$$20 = \frac{80 \times 9.8}{12.8} = 60 \text{ نيوتن}$$

$$20 = \frac{80 \times 9.8}{12.8} = 60 \text{ نيوتن}$$

• لا يمكن الحالة الخاصة

$$\frac{80}{9.8} = \frac{20}{7.8} = \frac{20}{3.8}$$

بس كمل انت الباقي

مثال اذا كانت ١٠ (٢٢٢) ٢٠٩٦ (٤٩١) ٣٠ (ب ١٢) ثلاث قوا متلاقية في نقطة واحدة ومترنة او حيد فمية ٢٢ ب

الحل

• المجموعه مترنة والله مش من عندك لا سمح الله لكن هو قال كذا

$$\therefore 10 + 20 + 30 = 60$$

$$(10 + 20 + 30) = (1 + 2 + 3) \times 10$$

$$\therefore 3 = 1 \leftarrow 0 = 1 + 2$$

$$0 = 2 \leftarrow 0 = 2 + 0$$

مثال اذا كانت القوة ٢٠ هي محصلة القوتين ١٠ و ٢٠ فان مقدار محصلة القوتين الثلاث ١٠ و ٢٠ و ٢٠ تساوي

الحل

$$\vec{10} + \vec{10} = \vec{20}$$

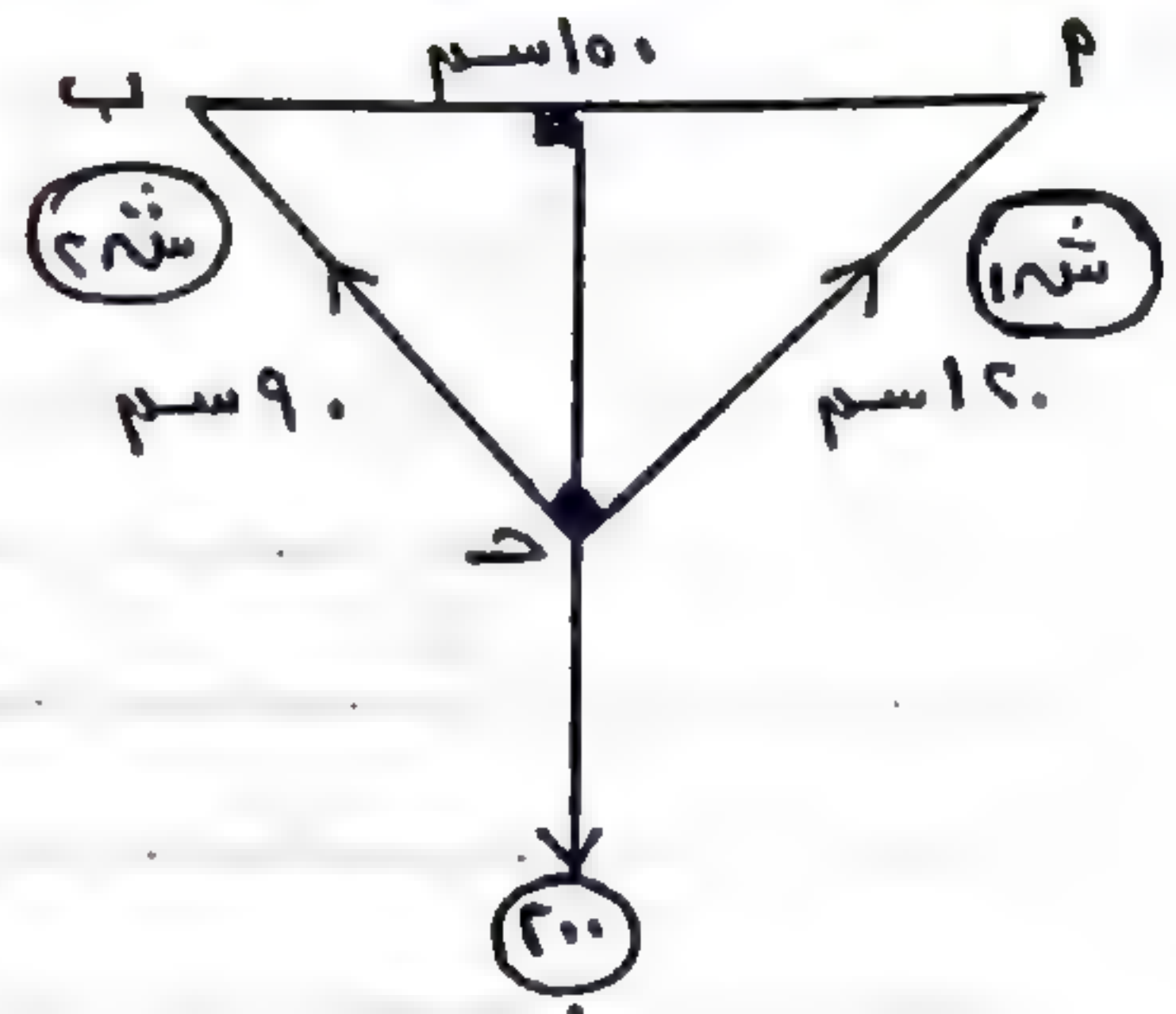
$$\therefore \vec{10} + \vec{10} + \vec{10} = \vec{30}$$

$$\vec{20} + \vec{20} = \vec{40}$$

$$\therefore \vec{20} = \vec{20}$$

• مقدار المحصلة $\vec{20} = \vec{20}$ #

مثال علق ثقل ٢٠٠ جم بخيطين طولهما ٩٠ سم و ١٢٠ سم من تقطعت في خط أفقي واحد البعد بينهما ١٥٠ سم أوجد مقدار الشد في كلا الخيطين؟
الحل



• يجب ليه زاوية ج قائمة لأنه
 $\angle(ب, ح) = \angle(ح, پ) + \angle(پ, ب)$
 • نطبق قاعدة مثلث القوى الممودة
 كل قوة خط عليها عودك على ضلع
 من أضلاع المثلث.

مثلاً $ب \perp ح$ $كش \perp ح$ $پ \perp ح$ $كش \perp پ$

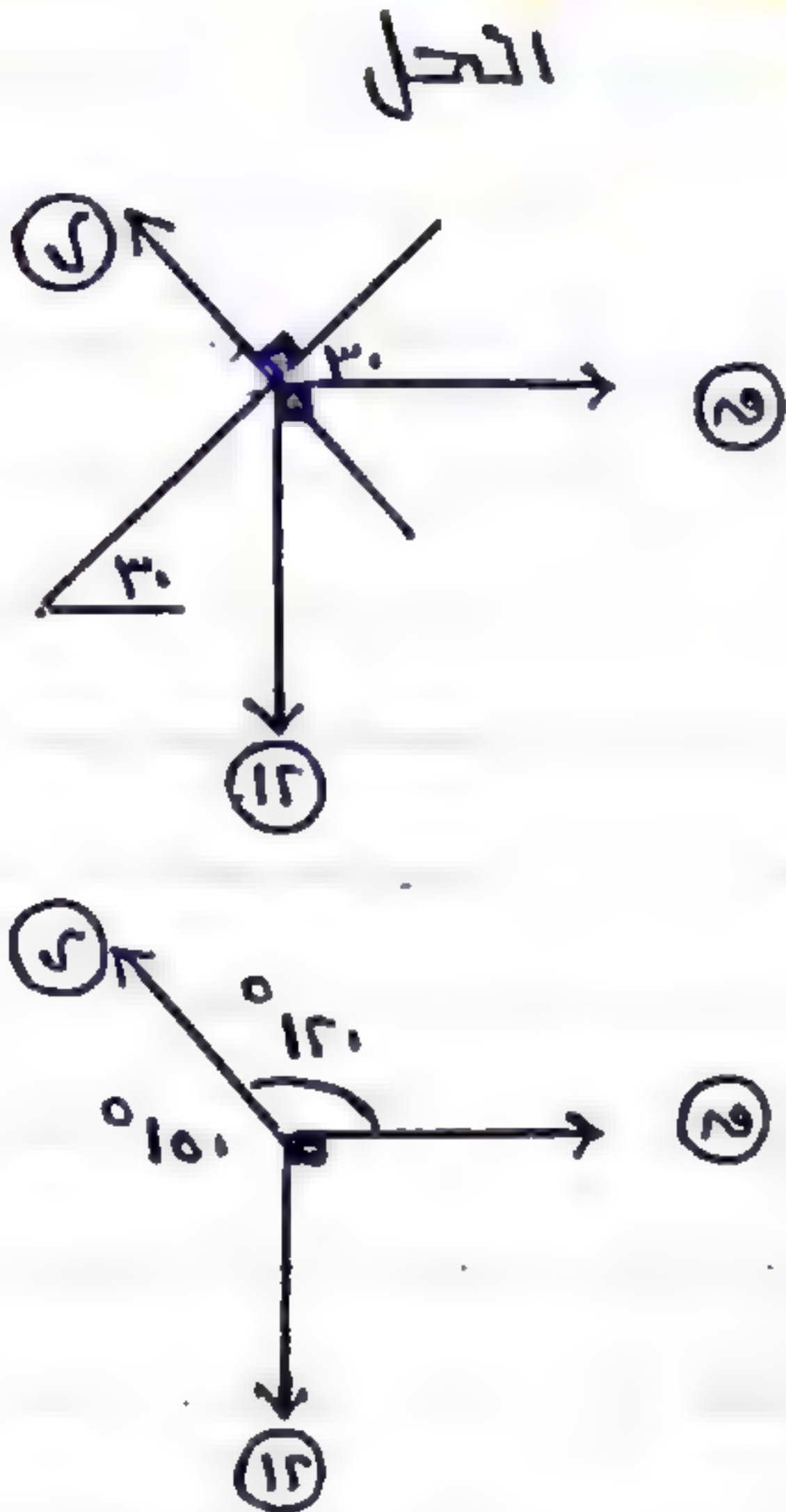
$$\therefore \frac{كش}{٩٠} = \frac{كش}{١٢٠} = \frac{٢٠٠}{١٥٠}$$

$$كش = \frac{٢٠٠ \times ٩٠}{١٥٠} = ١٢٠ \text{ ت. جم}$$

$$كش = \frac{٢٠٠ \times ١٢٠}{١٥٠} = ١٦٠ \text{ ت. جم}$$

ممكناً نطالعها بقاعدة لا مكاله.

مثال وضع جسم وزنه ١٢ ت. كجم على مستوكة اُملس يميل على الأفق بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوكة؟
الحل



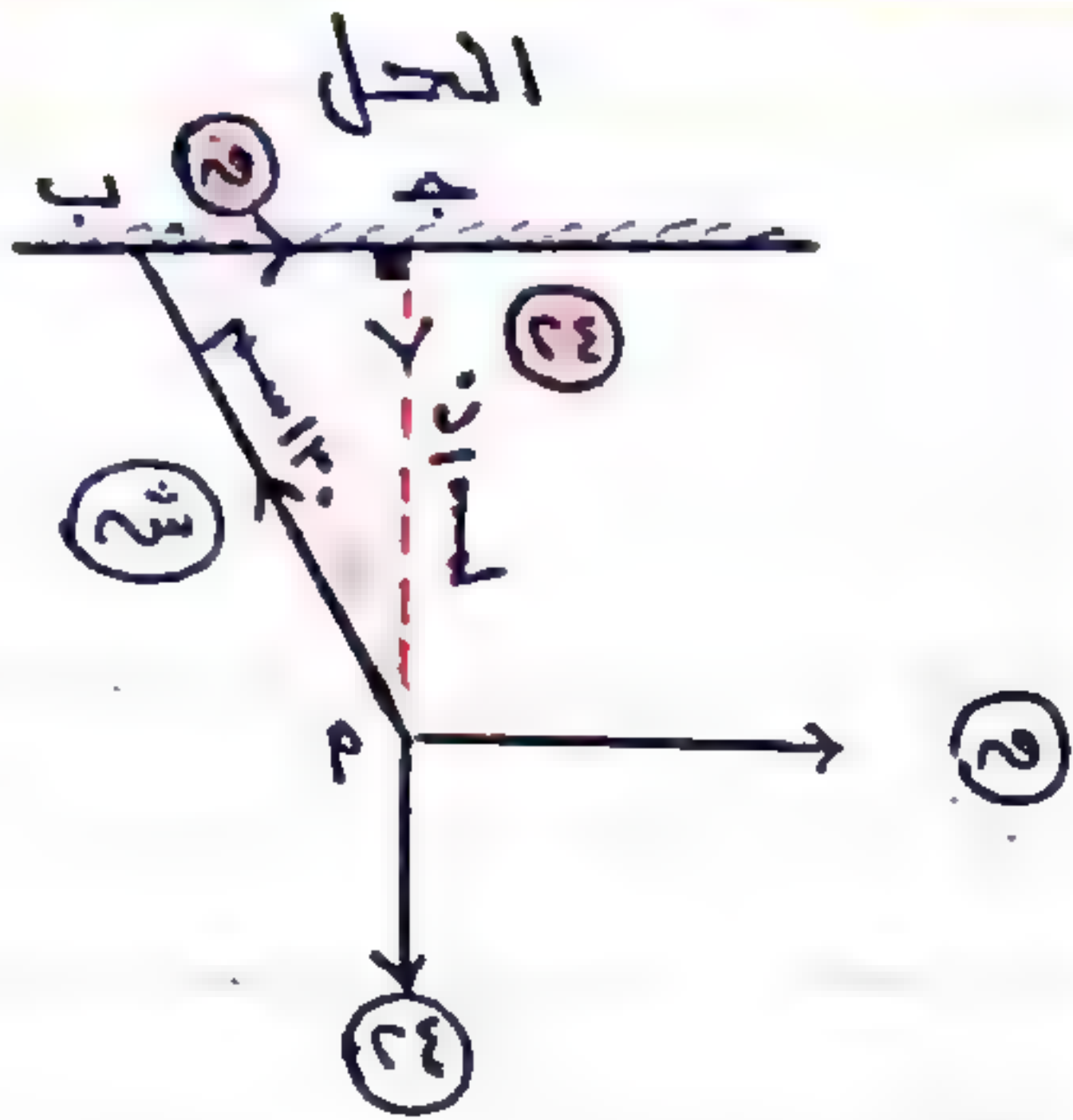
• لا مكاله والله

$$\frac{٥}{٩. حا} = \frac{١٢}{١٢. حا} = \frac{٥}{١٥. حا}$$

$$٥ = \frac{١٥. حا ١٢}{١٢. حا}$$

$$٥ = \frac{٩. حا ١٢}{١٢. حا}$$

مثال جسم وزنه ٩٠ نيوتن معلق في أحد طرفي حبل طوله ١٢٠ سم وطرفه الآخر مثبت في سقف الحجرة فإذا جذب الجسم بواسطة قوة أفقية في فاقزن الجسم عندما كان أسفل الحبل الأفقي المار بنقطة التعليق مسافة ١٢٠ سم أوجد القوة في الشد في الحبل ؟



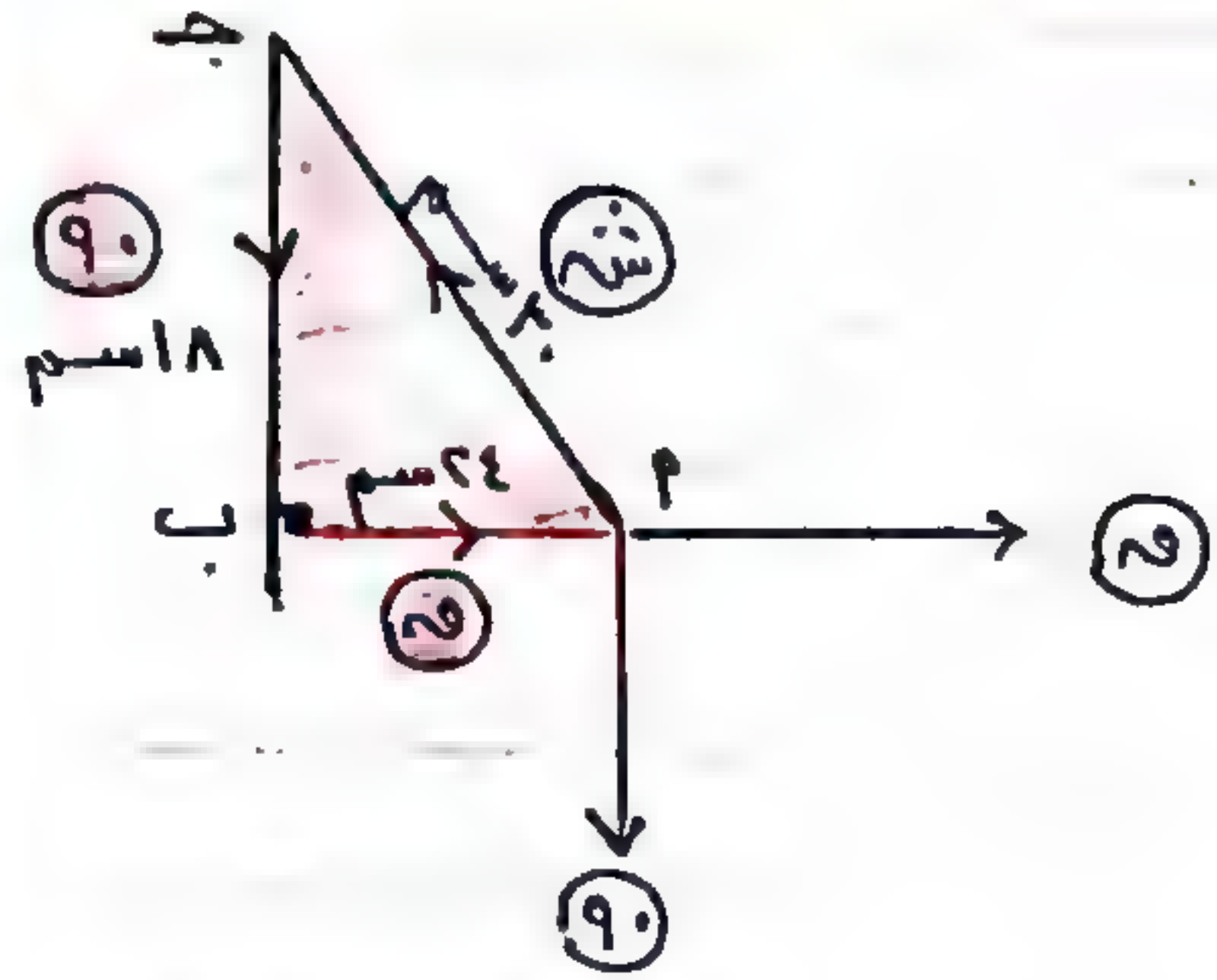
$$ب = \sqrt{120^2 - 120^2} = 0 \text{ سم}$$

$$\text{قاعدة مثلث القوى} = \frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$ب = \frac{90 \times 50}{120} = 37.5 \text{ نيوتن}$$

$$ب = \frac{120 \times 90}{120} = 90 \text{ نيوتن}$$

مثال جسم وزنه ٩٠ ت حم معلق في نهاية حبل طوله ٣٠ سم جذب الجسم تيار قوة أفقية حتى اتزلا وهو على بعد ٢٤ سم من الحبل أوجد مقدار القوة والشد في الحبل ؟



$$ب = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ سم}$$

■ قاعدة مثلث القوى

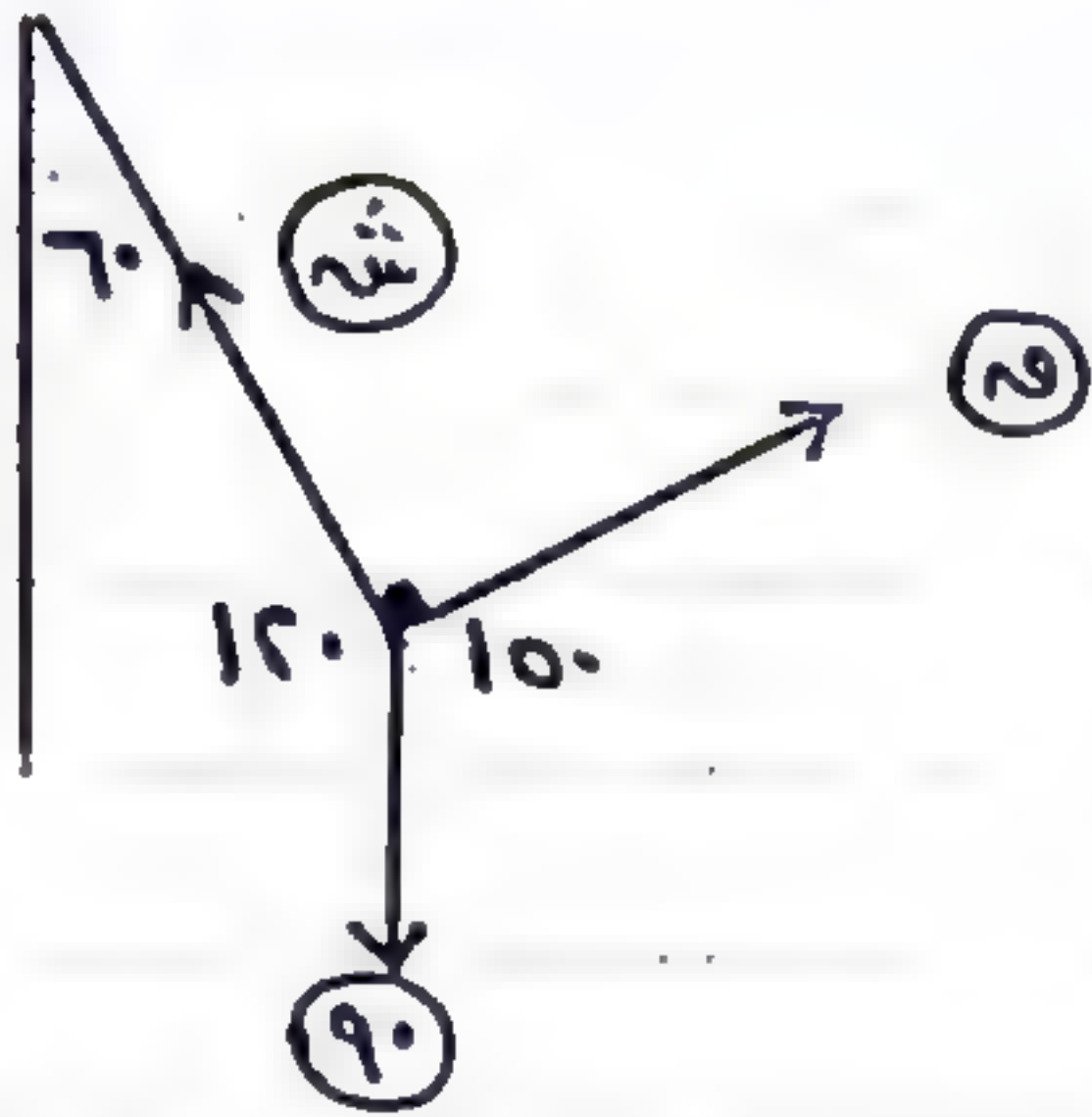
$$\frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$ب = \frac{30 \times 90}{120} = 22.5 \text{ ت. جم}$$

$$ب = \frac{120 \times 90}{120} = 90 \text{ ت. جم}$$

مثال علق ثقل مقدار ٩٠٠ تجم في طرفه
 حيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي
 وزيح الثقل بقوة عمودية على الحيط
 حتى أصبح الحيط مائلًا على الحائط بزاوية
 قياسها ٦٠° أوجد في وضع الاتزان مقدار
 القوة وكذلك الشد في الحيط؟

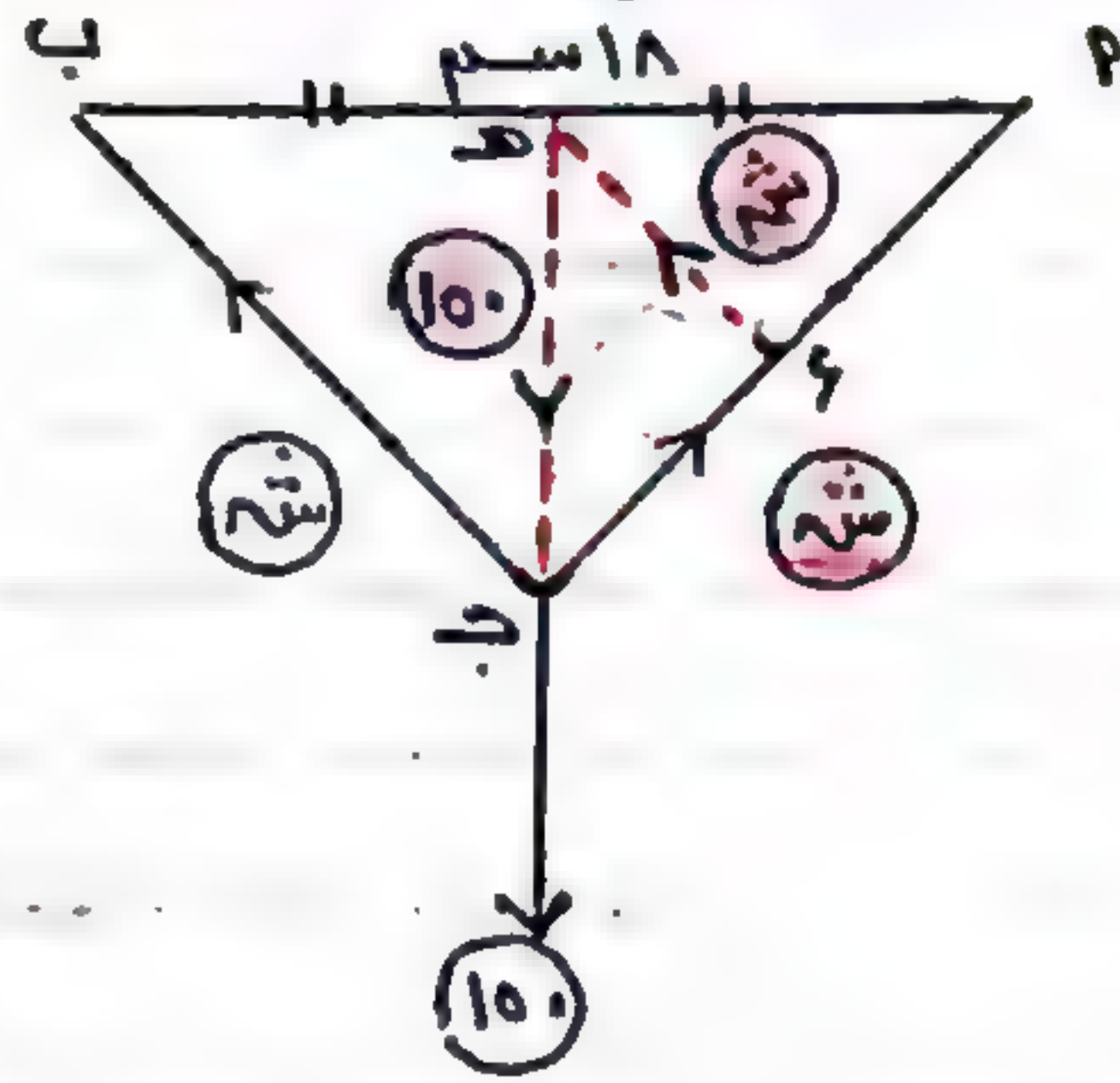
الحل



حلها أنته لأن المثال ذا قيم مكررة
 'أ' قسم بالله خلاص ارتحتم لما
 حلقتو نكه.

مثال حيط أبيض طوله ٣٠ سم ٦ ربط
 في تقاطع ٦ ب بحيث كان ٦ ب
 أفقياً وطوله ١٨ سم فإذا انزلت
 حلقة ملساء وزنها ١٥٠ تجم على
 الحيط أشيت أنه في وضع الاتزان
 يكون طول فرع الحيط مساوياً
 ثم أوجد الشد في كل منهما؟

الحل



هو قال البكرة ملساء ∴ الشد في فرع
 الحيط مساوياً

$$\therefore P = B = J = \frac{3}{4} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore 6 = H = \frac{1}{4} = 7,5 \text{ سم}$$

$$6 = J = \frac{1}{4} = 7,5 \text{ سم}$$

$$5 = H = J = 12 = 10 - 2 = 12 \text{ سم}$$

٥ هـ ج قبل القوى

$$\therefore \frac{150}{12} = \frac{J}{7,5} = \frac{J}{7,5}$$

$$\therefore J = \frac{150 \times 7,5}{12} = 93,75 \text{ تجم}$$

$$9 = \frac{12 \times \text{ح} (30 + 16) + 19}{10 \times \text{ح}}$$

$$\therefore 9 = 18, 26 \text{ نيوتن} \quad \#$$

حل آخر:

نطبق قاعدة لامع الخامسة

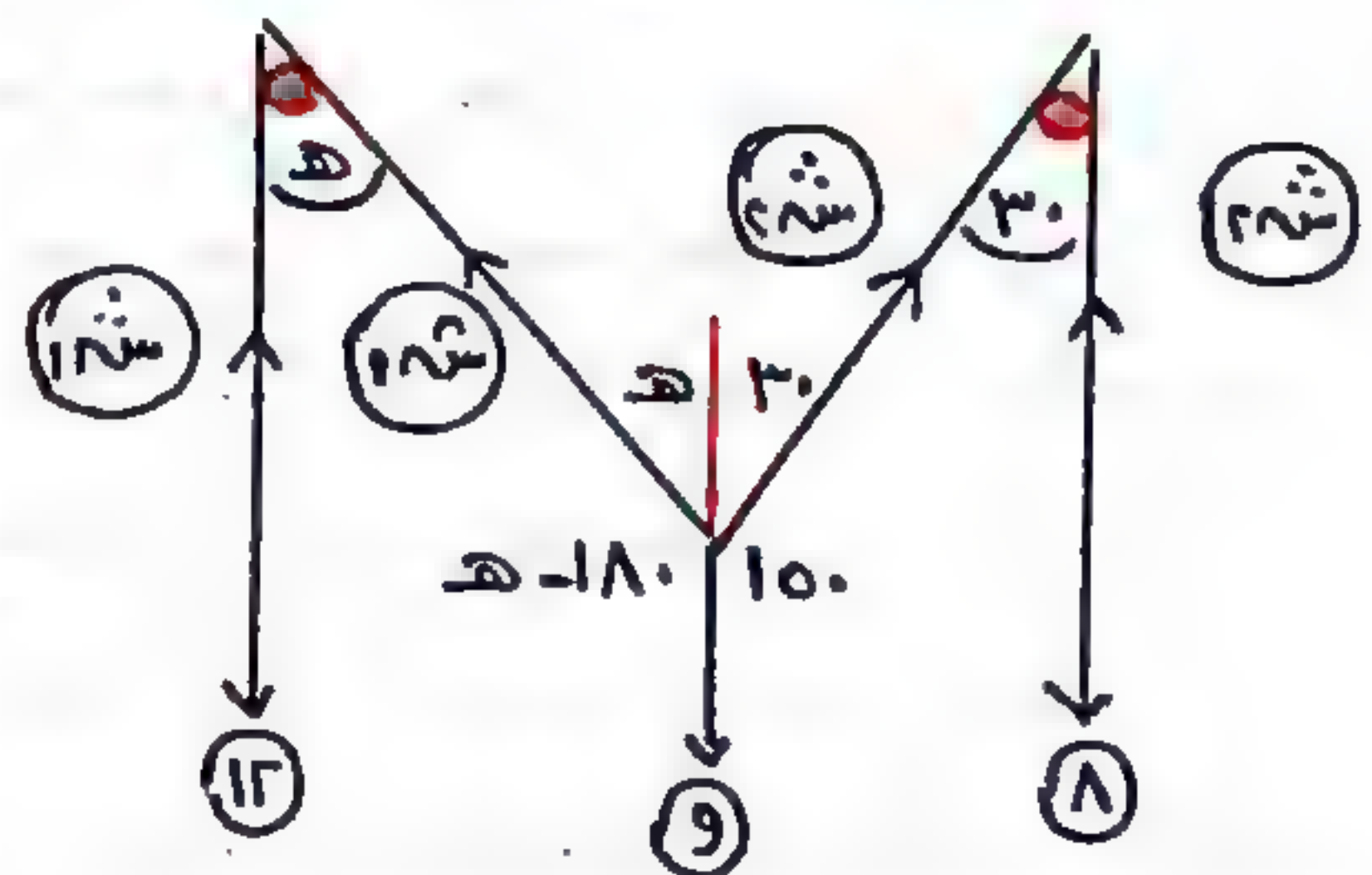
$$\frac{9}{\text{ح} (30 + 16)} = \frac{18}{10 \times \text{ح}} = \frac{26}{\text{ح}}$$

$$\frac{9}{\text{ح} (30 + 16)} = \frac{12}{1} = \frac{8}{\text{ح}}$$

كامل انتة الحل يا عسل

مثال علقت جسم وزنه (9) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأس بزاوية قياسها (30°) ويمر على بكره صغيرة ملساء ويحمل في نهايته الآخر وزن مقدار 12 نيوتن ويميل الثاني على الرأس بزاوية قياسها (30°) ويمر على بكره ملساء ويحمل في نهايته الآخر وزن مقدار 8 نيوتن أو جسد خفيف (هـ) ومقدار الوزن ؟

الحل



$$8 = 2 \text{ ش} \quad 12 = 1 \text{ ش}$$

• بتطبيق قاعدة لامع :

$$\frac{9}{\text{ح} (30 + 16)} = \frac{18}{10 \times \text{ح}} = \frac{26}{\text{ح}}$$

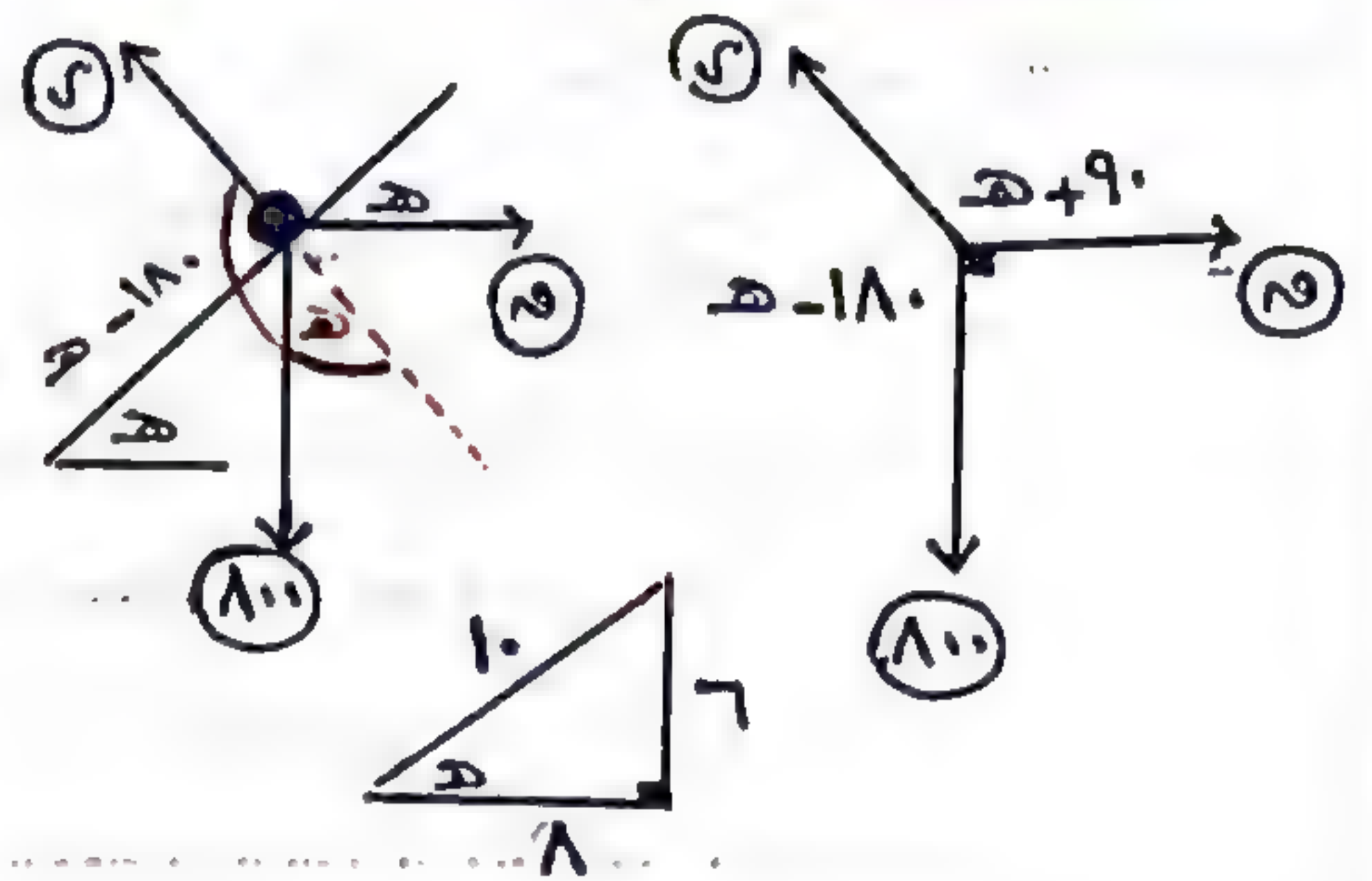
$$\frac{9}{\text{ح} (30 + 16)} = \frac{12}{10 \times \text{ح}} = \frac{8}{\text{ح}}$$

$$\frac{10 \times \text{ح} \times 8}{12} = \text{ح}$$

$$\therefore \text{هـ} = 16, 28, 19$$

مثال ومنه جسم وزنه ٨٠٠ تجم على مستو أملس يميل على الأفق بزاوية قياسها حيث جاهد = ١٠. وحفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة أفقية أو حد مقدار هذه القوة ورد فعل المستو على الجسم.

الحل



$$\frac{N}{\sin 90^\circ} = \frac{800}{\sin 10^\circ} = \frac{R}{\sin 80^\circ}$$

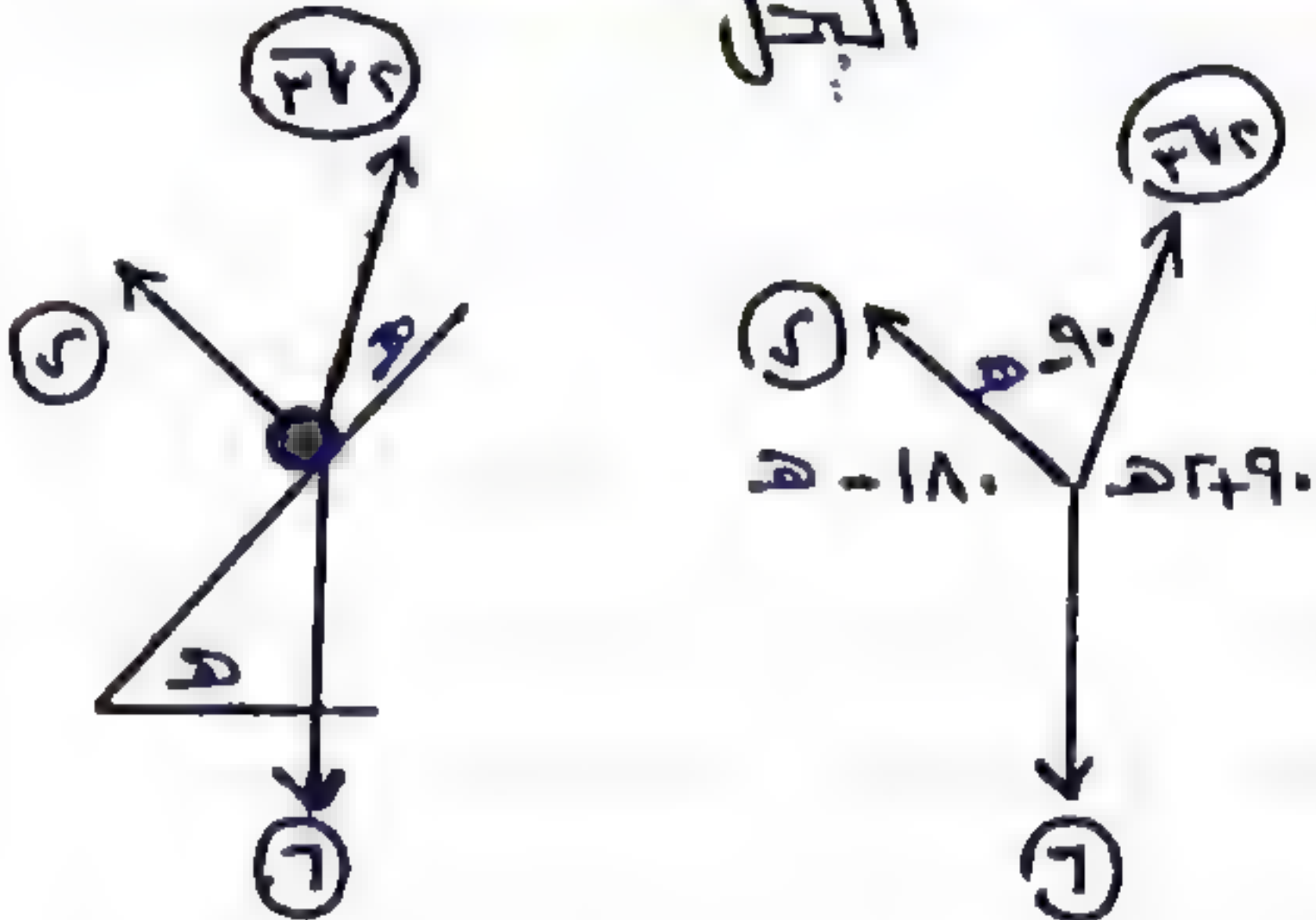
$$\frac{N}{1} = \frac{800}{\sin 10^\circ} = \frac{R}{0.1736}$$

$$N = \frac{800 \times 0.1736}{1} = 138.88 \text{ تجم}$$

$$R = \frac{1 \times 800}{0.9848} = 812.4 \text{ تجم}$$

مثال ومنه جسم وزنه ٦ نيوتن على مستو أملس يميل على الأفق بزاوية ٣٧. وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٣٧٢ نيوتن ويميل على خط أكبر ميل للمستو بزاوية ٥. لأعلى أو حد قيمة ورد الفعل للمستو.

الحل



$$\frac{N}{\sin 90^\circ} = \frac{372}{\sin 32^\circ} = \frac{R}{\sin 57^\circ}$$

$$\frac{N}{1} = \frac{372}{\sin 32^\circ} = \frac{R}{0.8391}$$

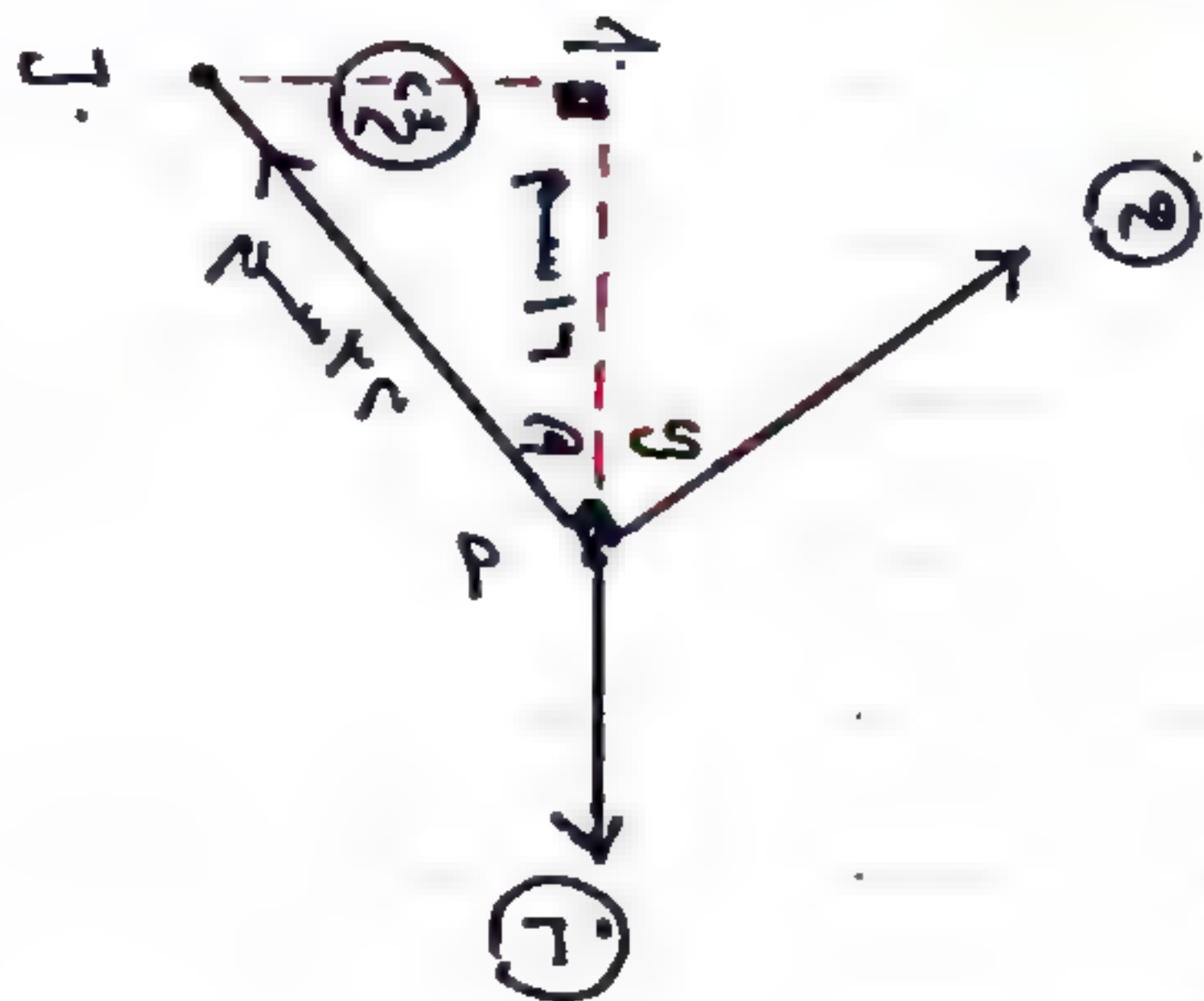
$$\frac{N}{1} = \frac{372}{0.5299}$$

$$\frac{37}{4} = \frac{372}{6} = \frac{R}{\sin 37^\circ}$$

$$R = \frac{6 \times 37}{4} = 55.5 \text{ نيوتن}$$

مثال جسم وزنه ٦٠ تاجم معلق من أحد طرفي حبل خفيف (٩) مثبت طرفه الآخر (ب) في نقطة ثابتة حيث $٣٢ = ٣٢$ سم فإذا أثرت الجسم وهو على بعد ١٦ سم أسفل الحبل الأفقي المار بنقطة (ب) بقوة عمودية على الحبل. أوجد مقدار القوة والشدة في الحبل ؟

الحل



∴ طول المثلث المقابل للزاوية ب = $\frac{1}{2}$ طول الوتر
وذلك في Δ ب ج ∴ $٣٠ = (١٦)$
∴ $٦٠ = (٩٠ + ٣٠) - ١٨٠ = (٥٠)$
∴ $٣٠ = ٦٠ - ٩٠ = (٣٠)$

من قاعدة لامع الخاصة

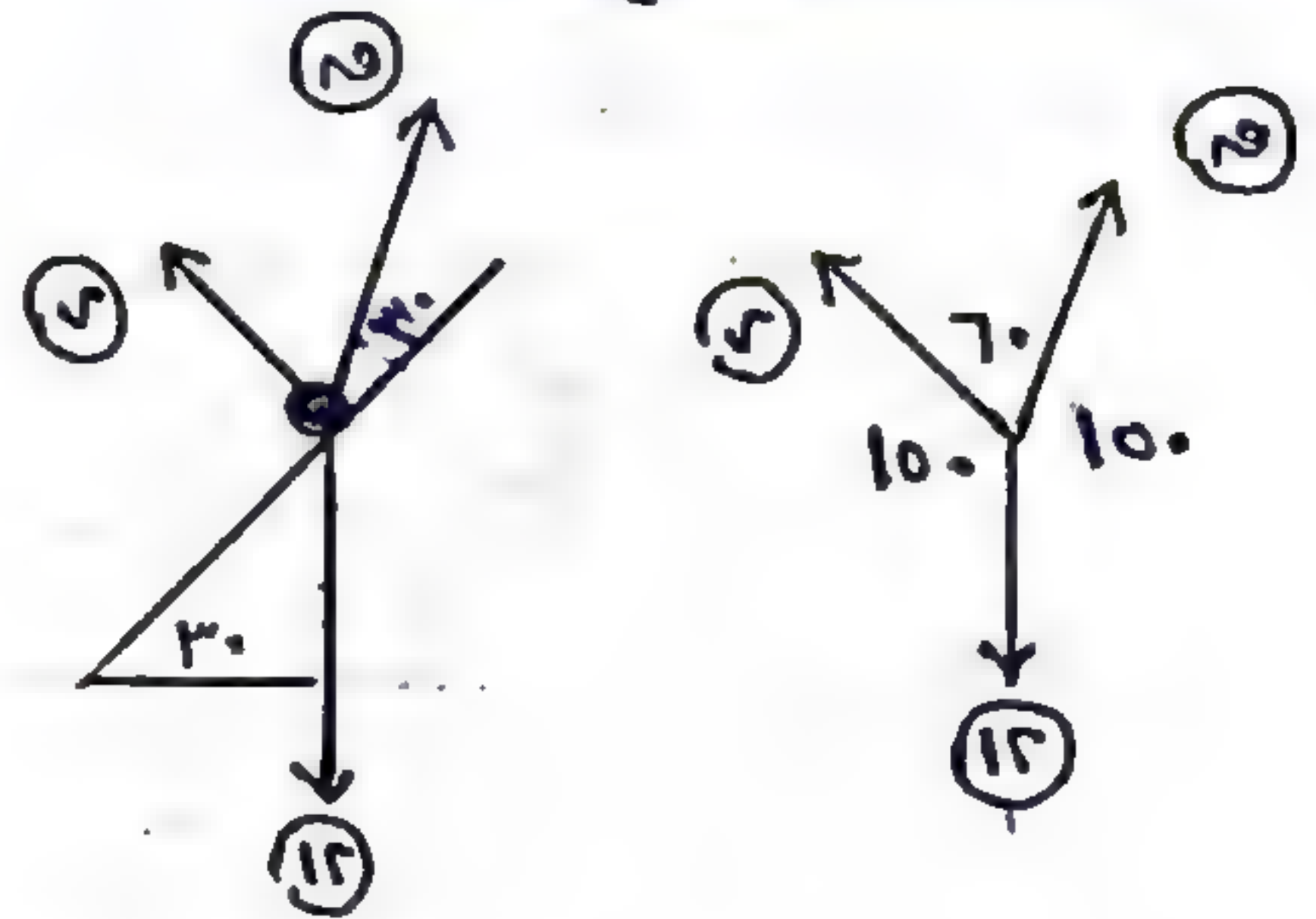
$$\frac{٦٠}{٩٠} = \frac{\text{ش}}{\text{حاج}} = \frac{٣٠}{\text{حاج} + (٥٠)}$$

$$\frac{٦٠}{٩٠} = \frac{\text{ش}}{٣٠} = \frac{٣٠}{٦٠}$$

$$\dots\dots\dots = \text{ش} \dots\dots\dots = ٣٠$$

مثال ومنه جسم وزنه ١٢ نيوتن على مسوكة أمس يميل على الأفقية بزاوية ٣٠° وحفظ من الأثر لاق تأثير قوة مقدارها ١٥ نيوتن ويميل اتجاهها على المسوكة بزاوية قياسها ٣٠° إلى الأعلى أوجد رد الفعل ؟

الحل



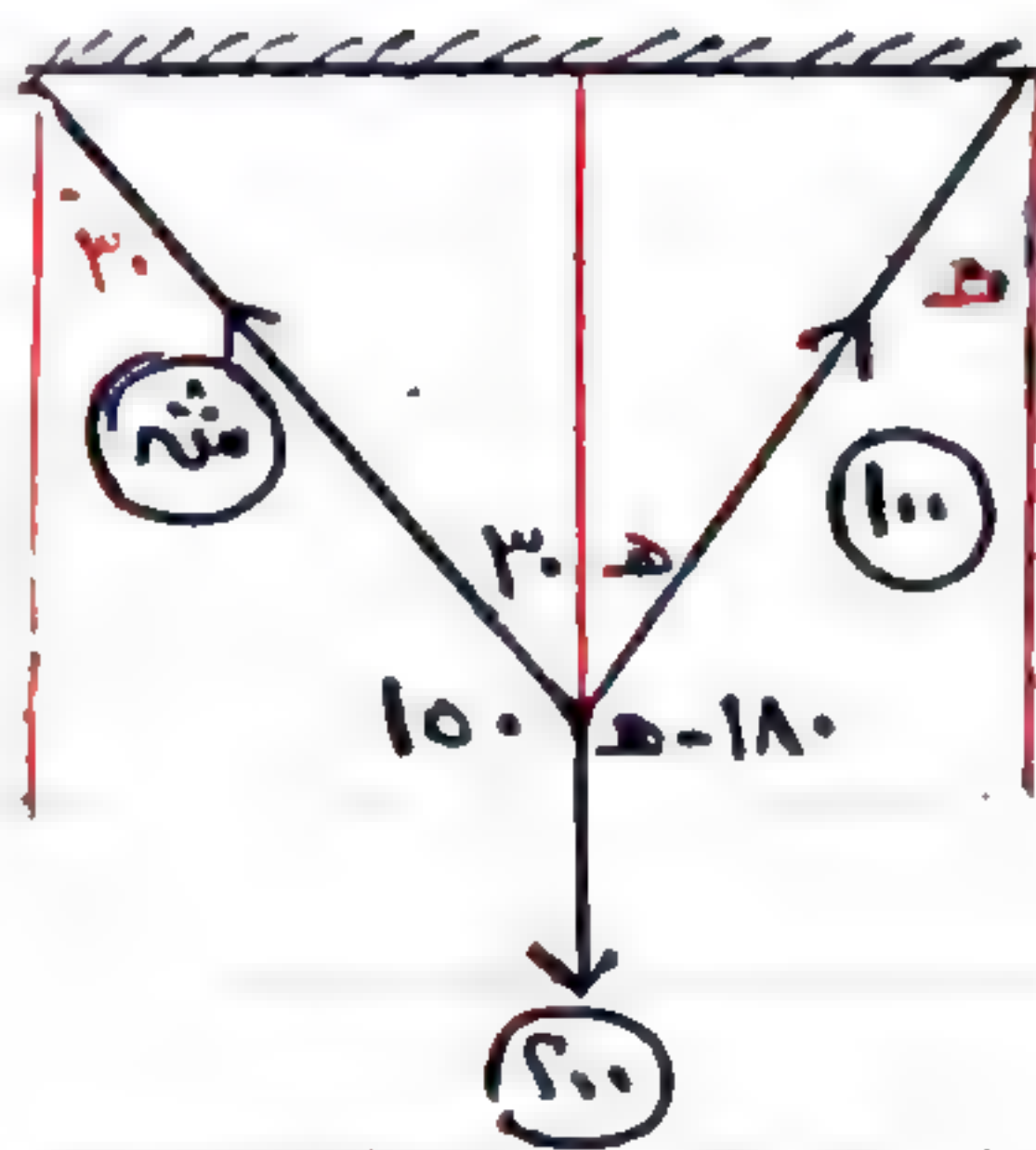
$$\frac{١٢}{٦٠} = \frac{٣}{١٥٠} = \frac{٣}{١٥٠}$$

$$\text{ب } ٣ = \frac{١٢ \times ١٥٠}{٦٠} = ٣٠ \text{ نيوتن}$$

$$\text{ب } ٣ = \frac{١٢ \times ١٥٠}{٦٠} = ٣٠ \text{ نيوتن}$$

مثال علفت حبسم وزنه ٢٠٠ ت، حجم بواسطة خططين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية هـ وبميل الآخر على الرأسى بزاوية ٣٠ قياسها ٣٠° فإذا كان مقدار الشد في الحبل الأول = ١٠٠ ت حجم فأوجد هـ وكذلك مقدار الشد في الحبل الثاني؟

الحل



$$\frac{200}{\text{حـا} (20 + \text{هـ})} = \frac{\text{شد}}{\text{حـا} (20 - 180)} = \frac{100}{10 \text{ حـا}}$$

$$\frac{200}{\text{حـا} (20 + \text{هـ})} = \frac{\text{شد}}{\text{حـا} \text{هـ}} = \frac{100}{10 \text{ حـا}}$$

$$1 = \frac{10 \text{ حـا} \times 200}{100} = (20 + \text{هـ}) \text{ حـا} \quad \#$$

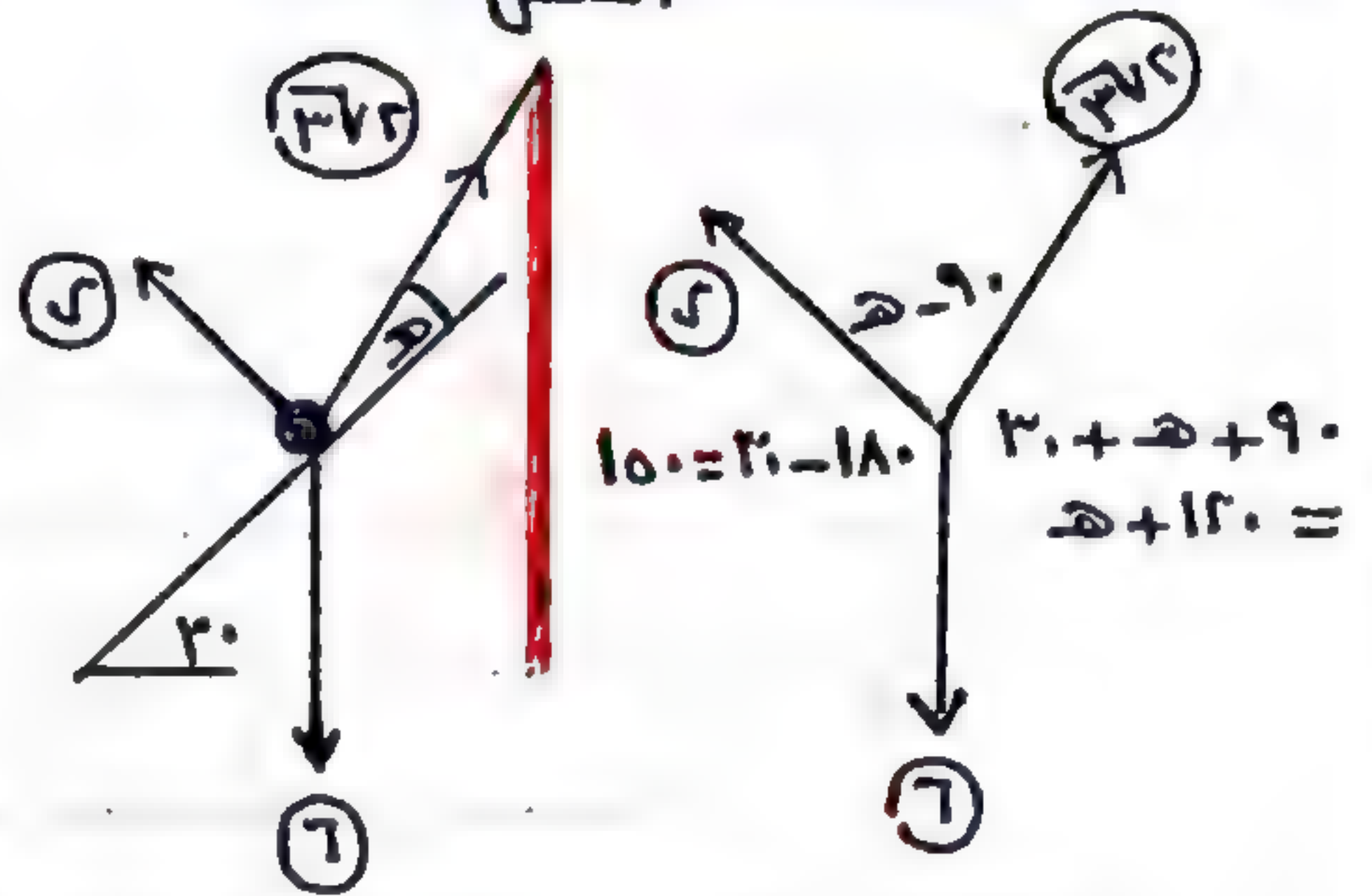
$$90 = \text{هـ} + 20$$

$$\# \quad 70 = 20 - 90 = \text{هـ} \quad \therefore$$

$$\text{شد} = \frac{100 \times 70 \text{ حـا}}{10 \text{ حـا}} = 700 \text{ ت، حجم}$$

مثال حبسم وزنه ٦ ت، حجم مستو على أملس يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° وحفظ بقوة شد شد = ٣٦٢ ت حجم أوجد قياس الزاوية التي تصنعها الحبل مع المستو وحجم مقدار رد الفعل للمستو على الحبسم؟

الحل



■ لا مك يا لامك يا روح فبكاء

$$\frac{6}{\text{حـا} (20 - 90)} = \frac{362}{\text{حـا} (20 + 120)} = \frac{362}{10 \text{ حـا}}$$

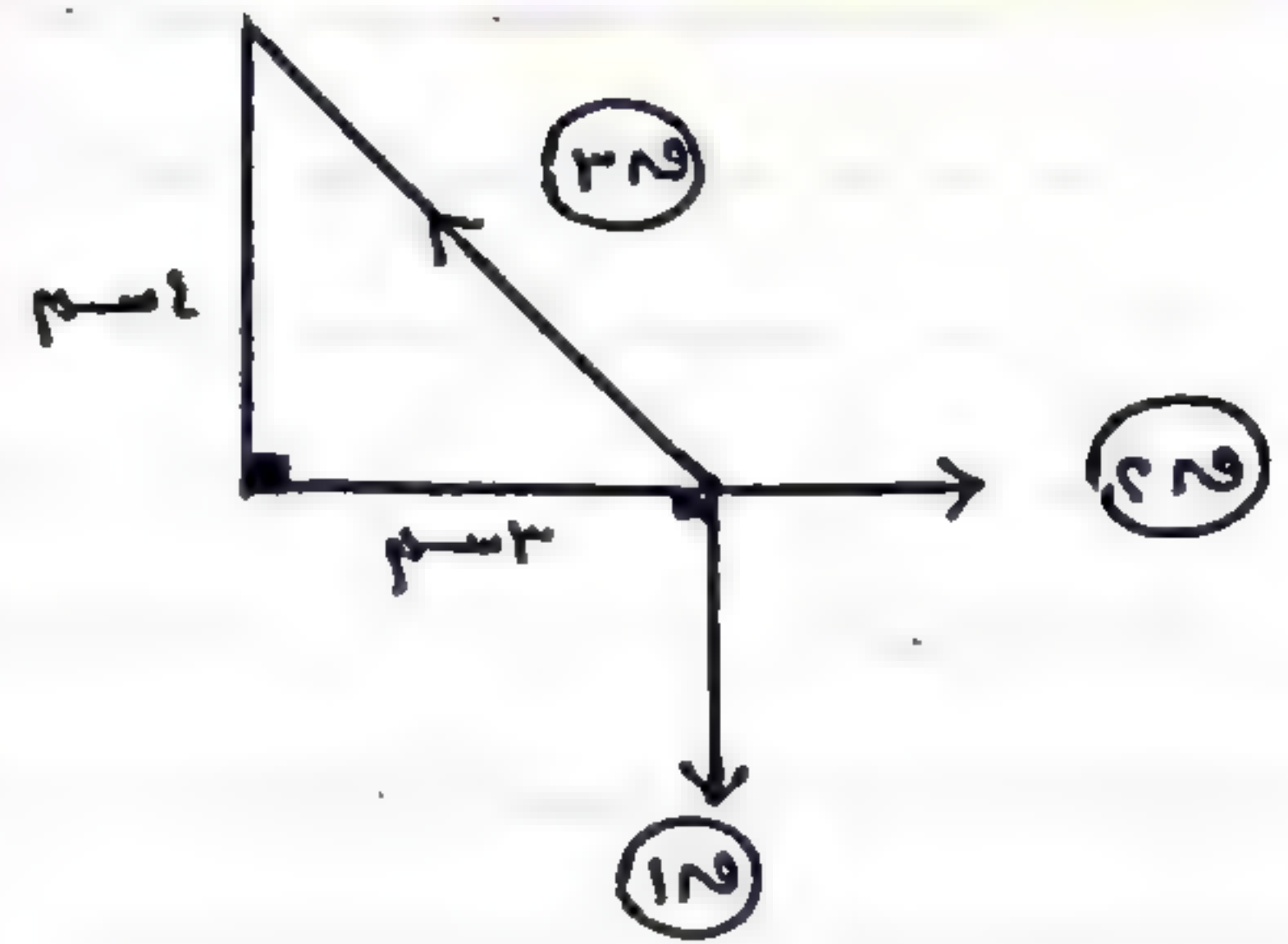
$$\frac{6}{\text{حـا} \text{هـ}} = \frac{362}{\text{حـا} (20 + 120)} = \frac{362}{10 \text{ حـا}}$$

$$\# \quad 30 = \text{هـ} \quad \therefore \quad \frac{6 \times \frac{1}{\text{حـا}}}{362} = \text{حـا} \quad \#$$

$$\frac{(20 + 120) \text{ حـا} \times 362}{10 \text{ حـا}} = 6$$

$$\# \quad 362 \text{ ت، حجم}$$

مثال من الشكل المقابل



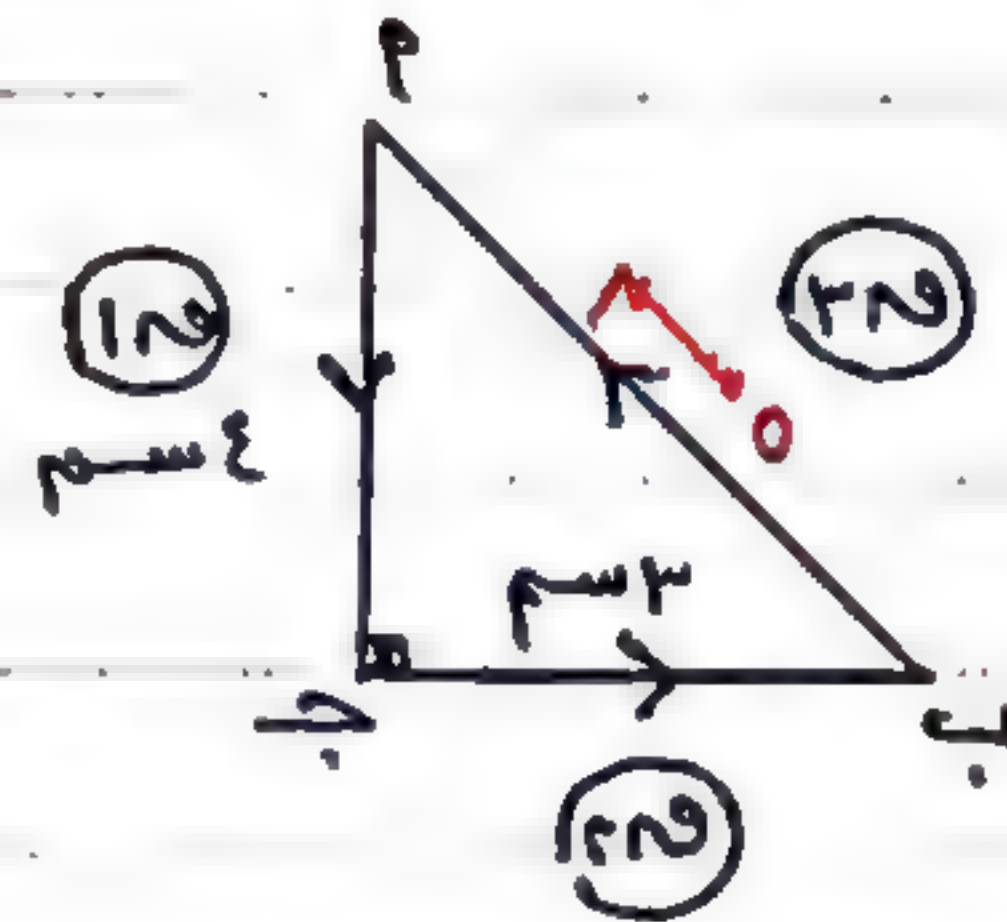
$$\dots\dots\dots = 30 : 20 : 10$$

$$\text{أ} \quad 3 : 2 : 1 \quad \text{ب} \quad 5 : 3 : 2$$

$$\text{ج} \quad 3 : 5 : 2 \quad \text{د} \quad 2 : 3 : 5$$

الحل

قاعدة مثلث المثلث



$$5 = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 3 : 2 : 1 = 30 : 20 : 10$$

مثال ثلاث قوائم متساوية في المقار ومثل فية في نقطة ومثل فية فان قياس

الزاوية بين القوسين =

$$\text{أ} \quad 90^\circ \quad \text{ب} \quad 60^\circ$$

$$\text{ج} \quad 150^\circ \quad \text{د} \quad 120^\circ$$

الحل

$$120 = 360 \div 3$$

هناك حل آخر طويل شوي

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

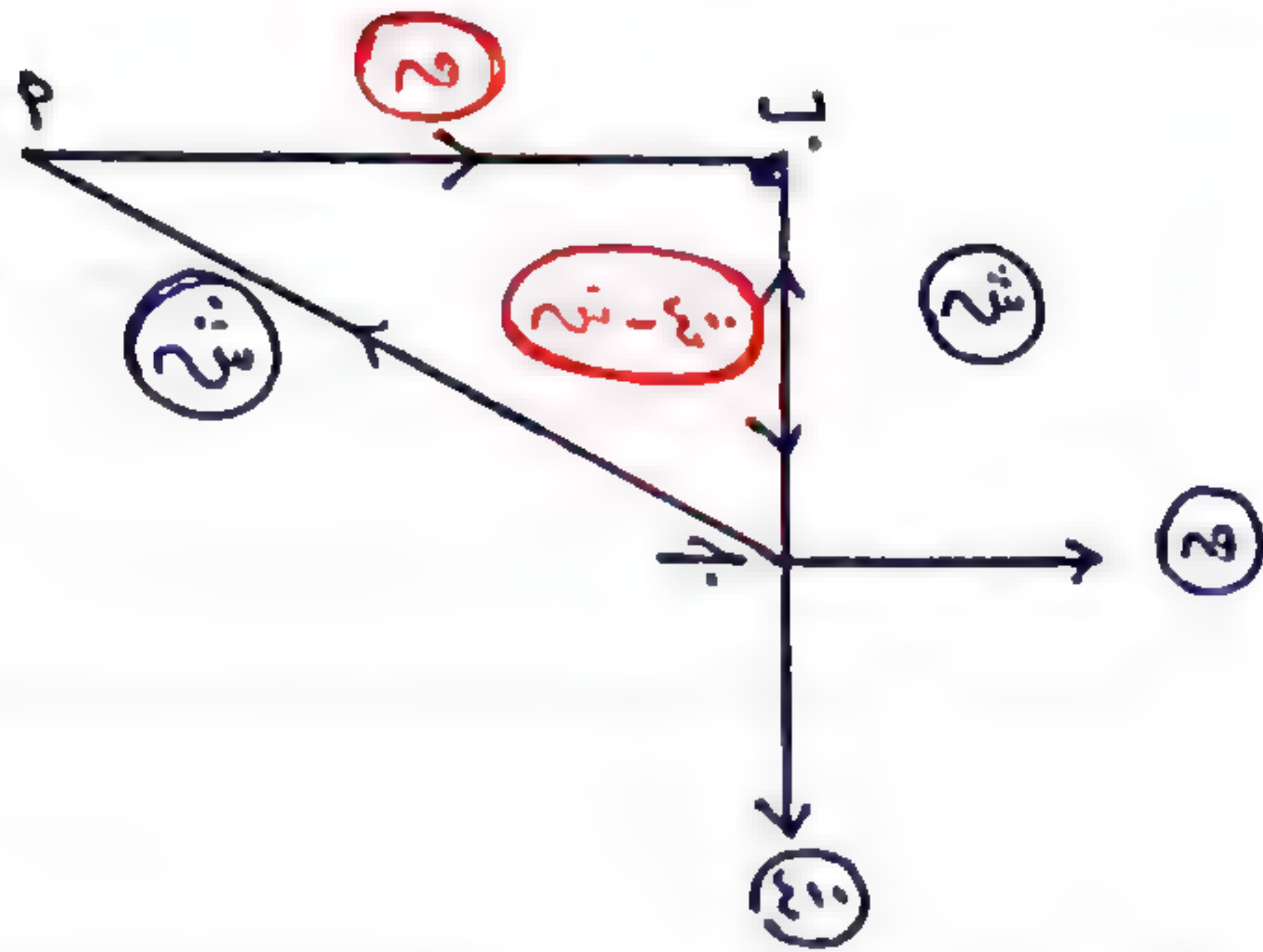
$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$

$$120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3 \quad 120 = 360 \div 3$$



نفرض $AB = S$ $\therefore AB = 60 - S$
ومعنا $AB = 20$ سم
من فيثاغورث :

$$(60 - S)^2 = S^2 + (20)^2$$

$$3600 - 120S + S^2 = S^2 + 400$$

$$3200 = 120S \Rightarrow S = 10$$

• تطبيق قاعدة ثبات القوى

$$\frac{2}{AB} = \frac{ش}{AB} = \frac{٤٠٠-ش}{AB}$$

$$\frac{2}{20} = \frac{ش}{20} = \frac{٤٠٠-ش}{10}$$

$$\therefore \frac{ش}{0} = \frac{٤٠٠-ش}{3}$$

بالتبسيط يا معلم $\therefore ش = 20$ ت. جم

مثال ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة متزنة فإذا كان ٣٦٧ نيوتن مقدار كل قوتين منهم فإنا مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي نيوتن

١١ ٢ ٥ ٣

الحل

$$[٣٨٠ : ٣] \quad ٣ - ٧ \quad ٥ \quad ٣ + ٧$$

$$[٣ : ٢] \quad ٢ \quad ٩ \quad ١٠$$

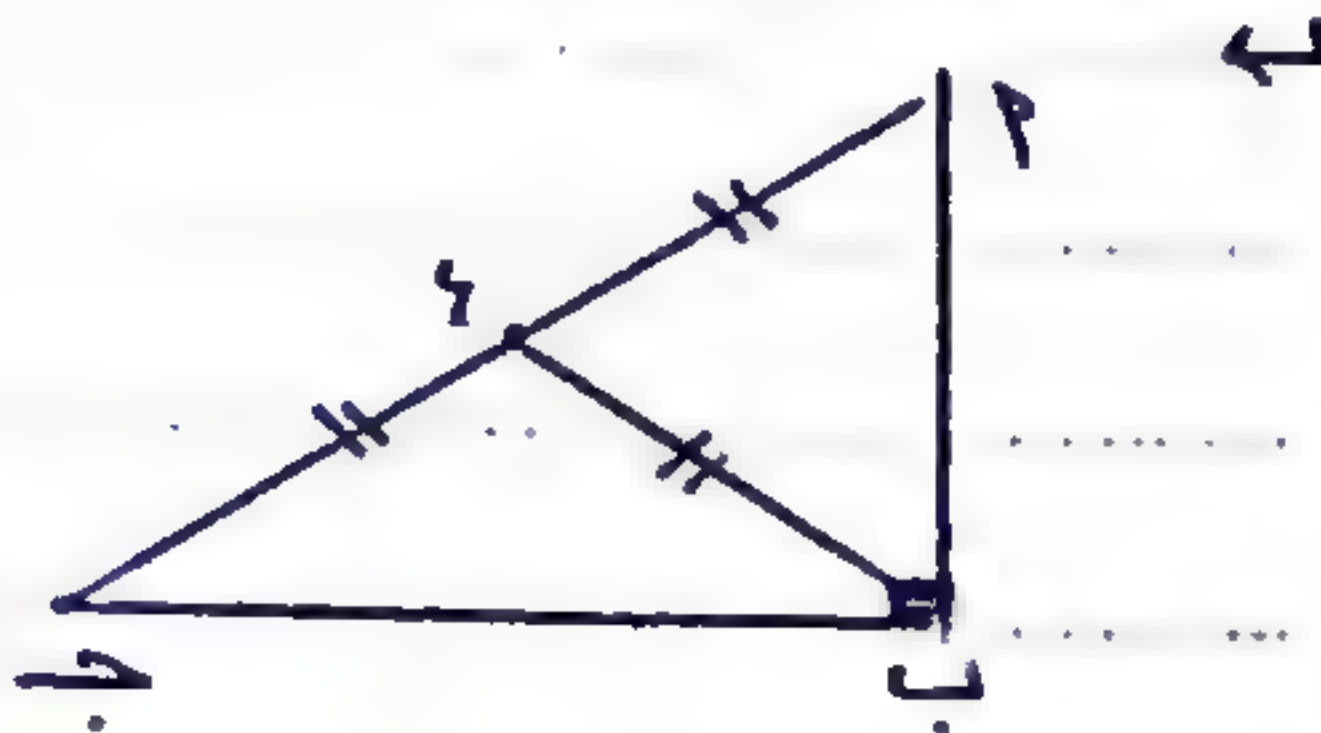
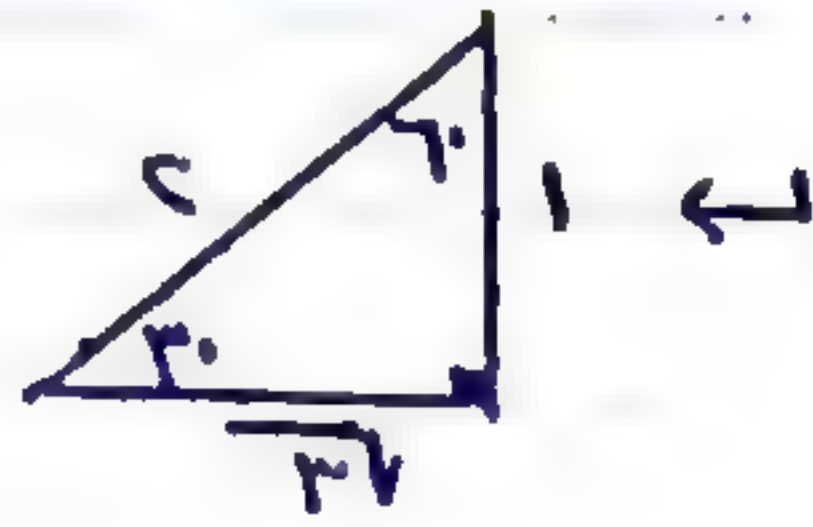
سوف يكون الفترة ماعدا ١٠ و ٩
واختار من بينهم هتلاكم العدد
٥ هو الصحيح فالاختيارات

مثال حلقة صغيرة طسا مقدار وزنها ٤٠٠ ت. جم تزلزلت على حيط خفيف طوله ٤٠ سم مثبت طرفاه في نقطتان م و ب على حيط أفقي واحد البعد بينهما ٢٠ سم أثرت على الحلقة قوة أفقية حتى أصبحت الحلقة في حالة التوازن واقفة أسفل النقطة ب فإن مقدار السد في الحيط يساوي ت. جم

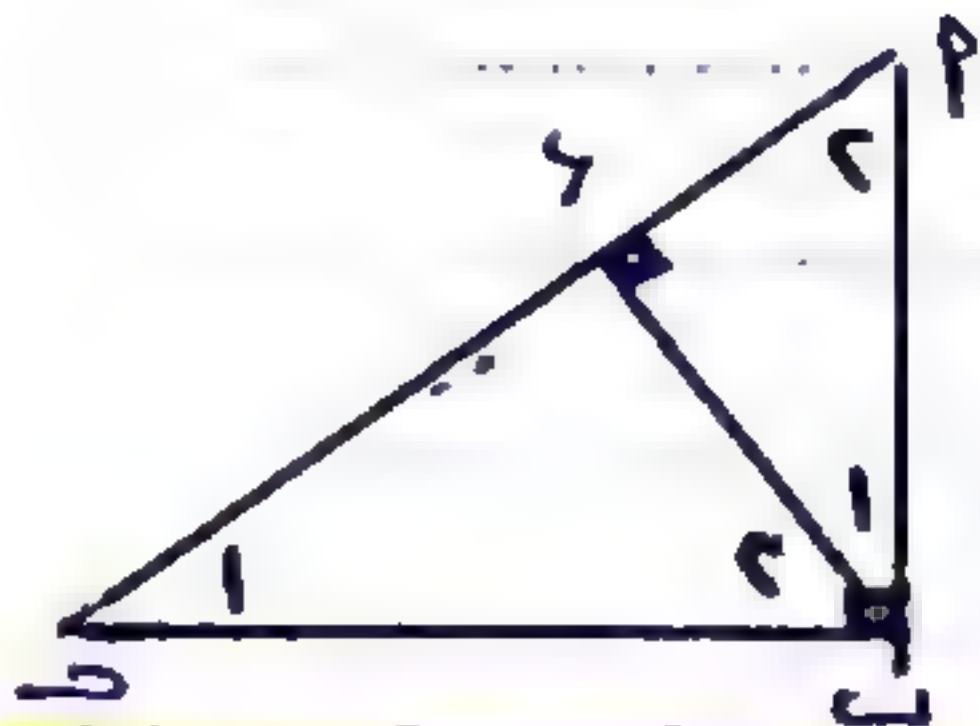
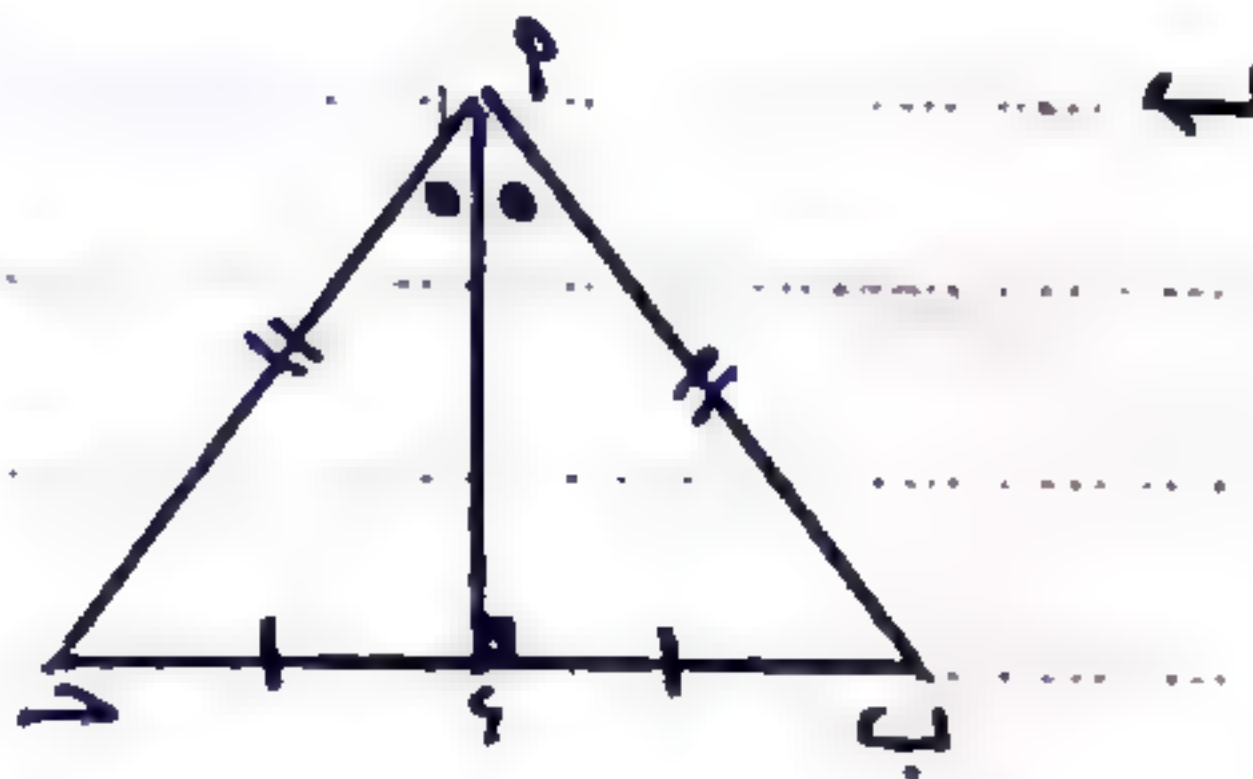
٢٠٠ ٣٠٠ ٢٥٠ ٤٠٠ ٤٥٠

الحل

الإجابة الصحيحة (٢) ٢٥٠ ت. جم
للتوضيح انظر الجهة المقابلة يا غالي



$\overline{P} = P$
 $\overline{\overline{P}} = P$
 $\overline{P} \text{ متضاد } P$
 $\overline{\overline{P}} \text{ منصف } P$



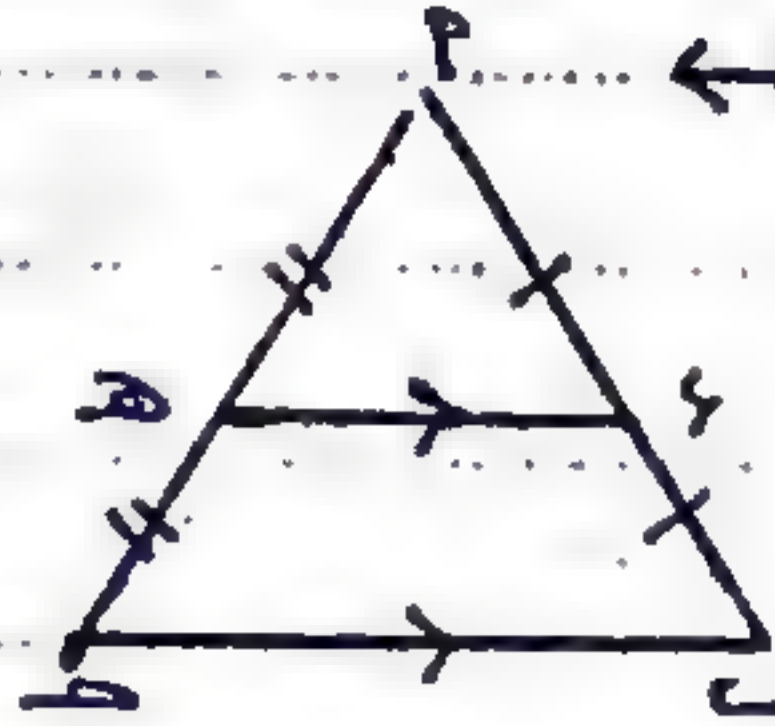
سہا عمود (نظریہ اکیڈس)

$$s \rightarrow x \text{ if } p = s(u) \leftarrow$$

CPX24 = 946

20x10 = 200

$$P \vdash X \text{ s.t. } P = \langle \lambda u. u \rangle$$



$$\frac{1}{n} = 0.5$$

تِلَا فَا حُطُو طَ عَمَل تِلَا ت قَوِي مَزَانَة :

• اذا اتت جسم جاسع تحتها يبر

ثلاث قوای غیر متوازیه و مستویه فانی

خطوط عمل الموجات الثلاث تلاقح في

نقطة واحدة .

عَلَّامٌ يَنْزِلُ فِي حَبِيبٍ تَحْتَ ثَائِبٍ ثَلَاثَ قَوَاعٍ لَا زَجْرَ
وَلَا بَدَأَ تِلْكَ قَدَحَ خَطُوطِ عَمَلِهِمْ كَمَا تَقَطُّعُ وَاحِدَةٌ .

• اذا اتى جسم تحت تأثير ثلاث قوى.

مستوية بحيث التماس خطها على التماس

منها فم نقطه فان خط عمل القوة الثالثة

لا بد وأن يمر بهذه النقطة .

بمسائل السلم أو القيسب اذا كانا :

- منظم : ... اذا "الوقت يومك" هو المصنف

- عن مشهم : إذا كان المكان الوايت غير محدد -

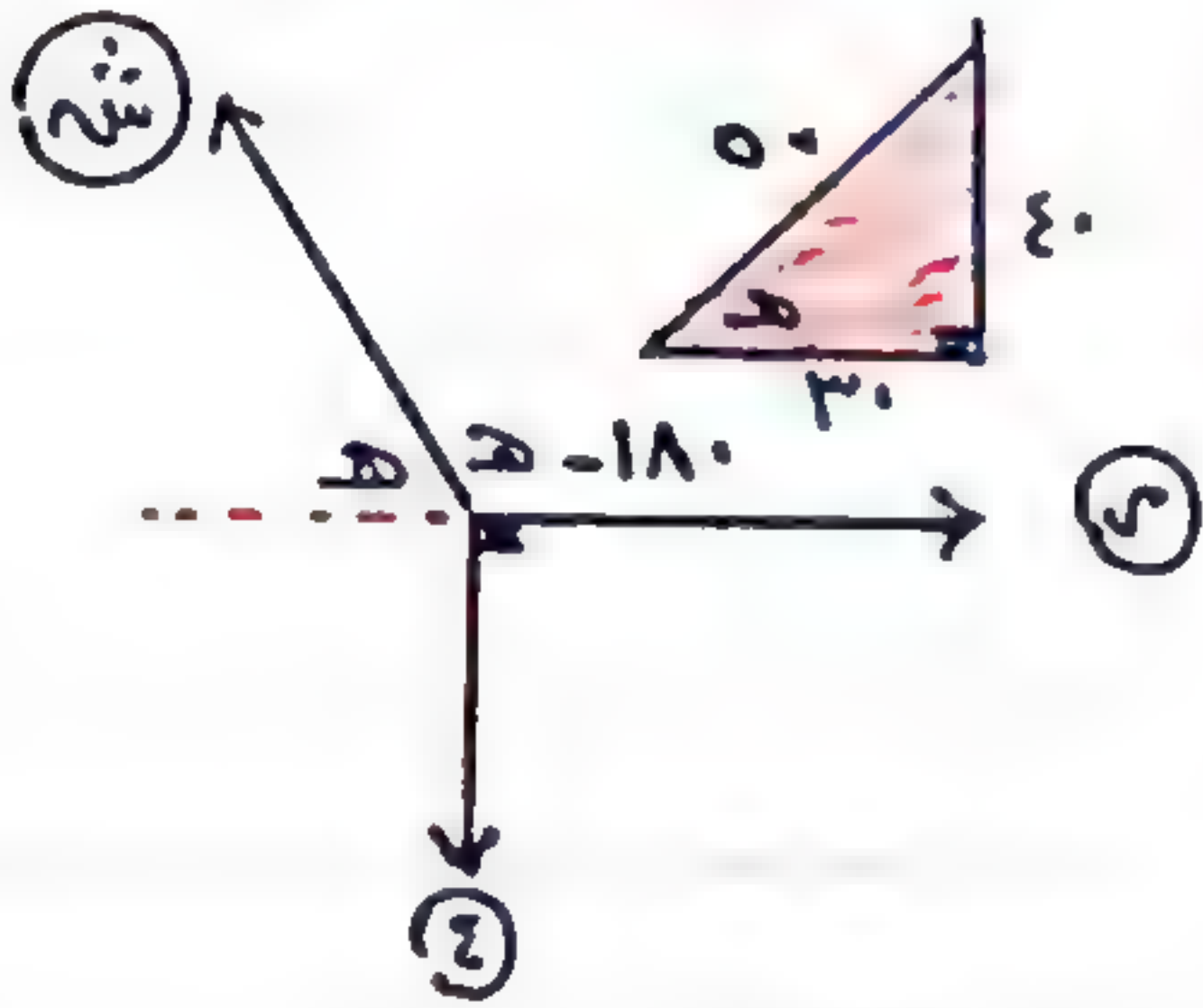
بِإِثْقَالِ قُوَّةِ خَطِّ عَمَلٍ مَشْهُوقٍ تَأْتِي



$$\text{■ } \nu = \frac{2 \times 30}{40} = 3 \text{ سم كجم}$$

$$\text{■ } \text{ش} = \frac{4 \times 50}{40} = 5 \text{ سم كجم}$$

حل آخر باستخدام قاعدة لافاييه



$$\frac{4}{\text{جا } (90+180)} = \frac{\text{ش}}{90} = \frac{3}{\text{جا } (180-90)}$$

$$\frac{4}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ش}}{90} = \frac{3}{\text{جا هـ}}$$

خلاص كذا كمل انت الحل

$$\text{بس نخلو بالك} \quad \text{■ جا هـ} = \frac{270}{3} = 90$$

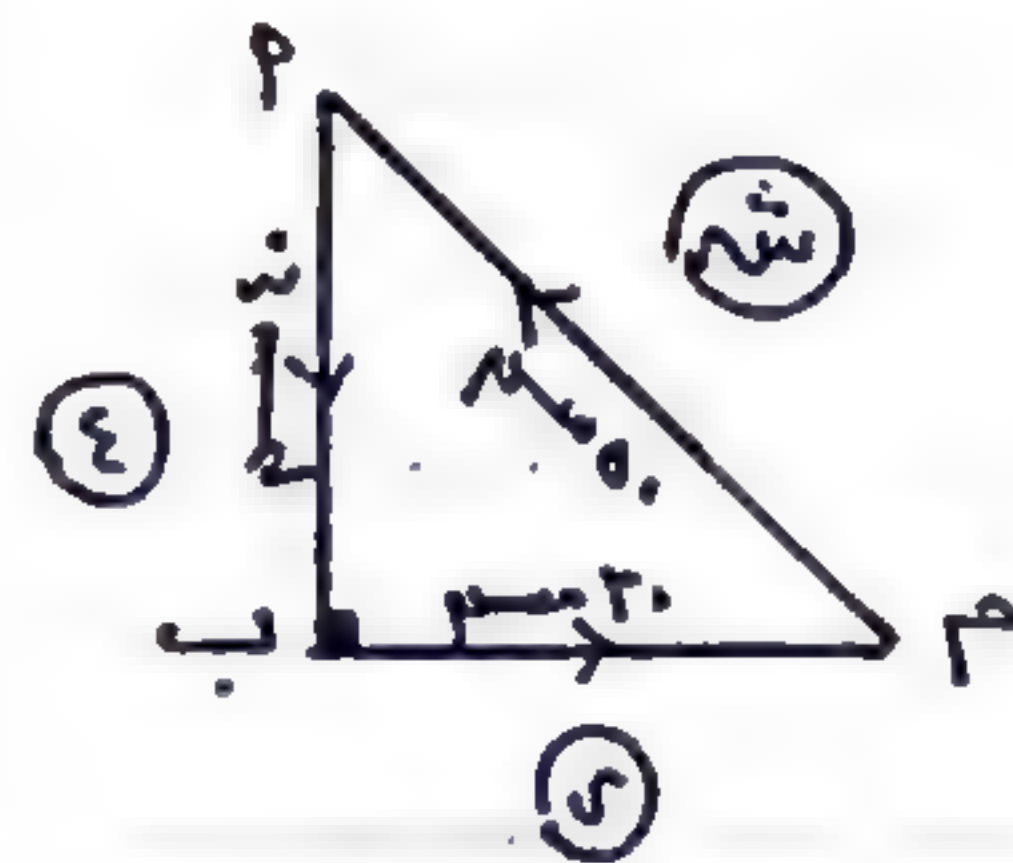
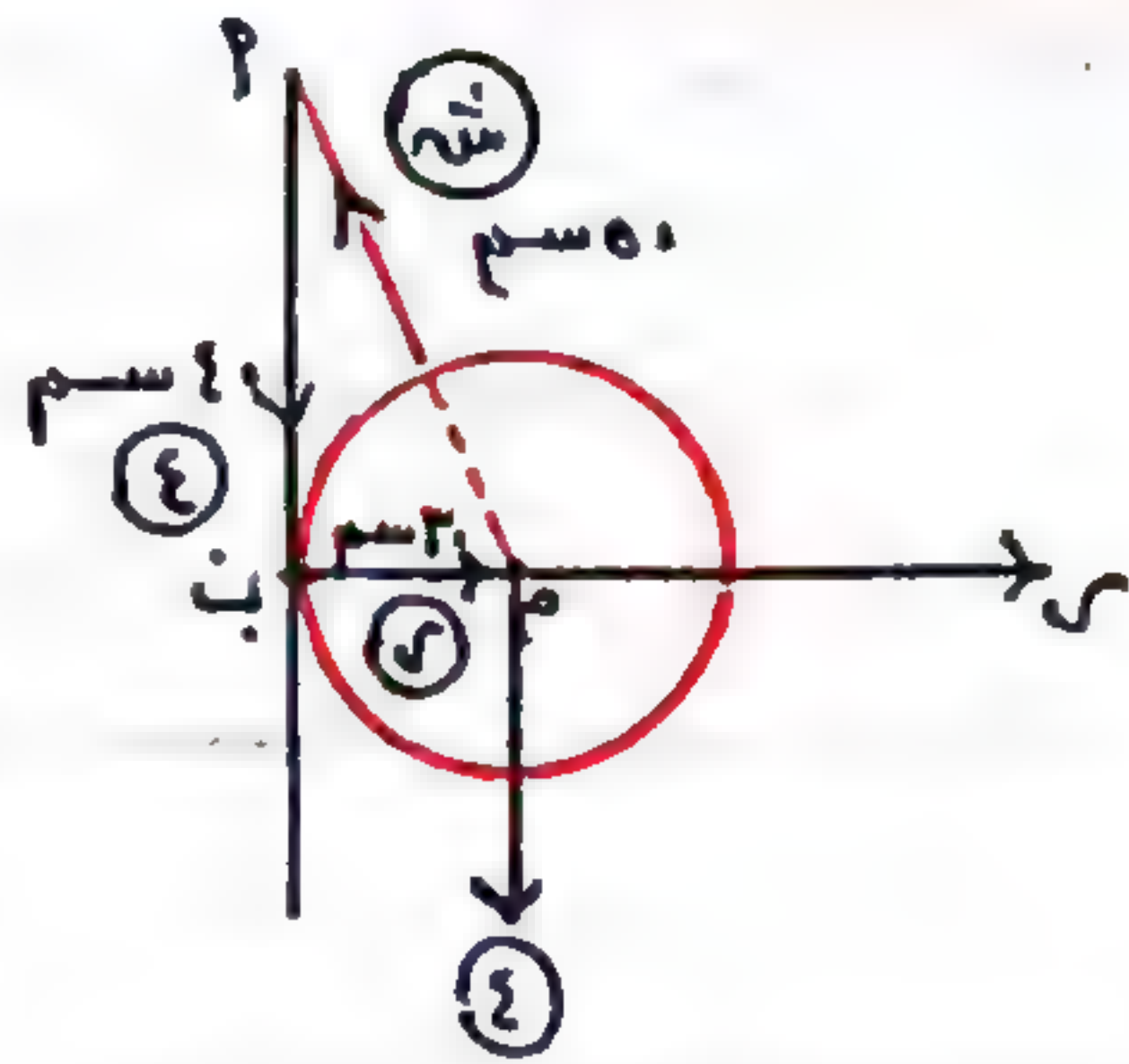
$$\text{■ جتا هـ} = \frac{270}{5} = 54$$

$$\dots = \nu$$

$$\dots = \text{ش}$$

مثال كرة ملساء وزنها ٤ سم كجم وطول نصف قطر حا ٣٠ سم علقته من نقطة على سطحها بخيط موله ٢٠ سم ومثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسه أ ملس أوجب كل من الشد في الحيط ورد فعل الحائط على الكرة ؟

الحل

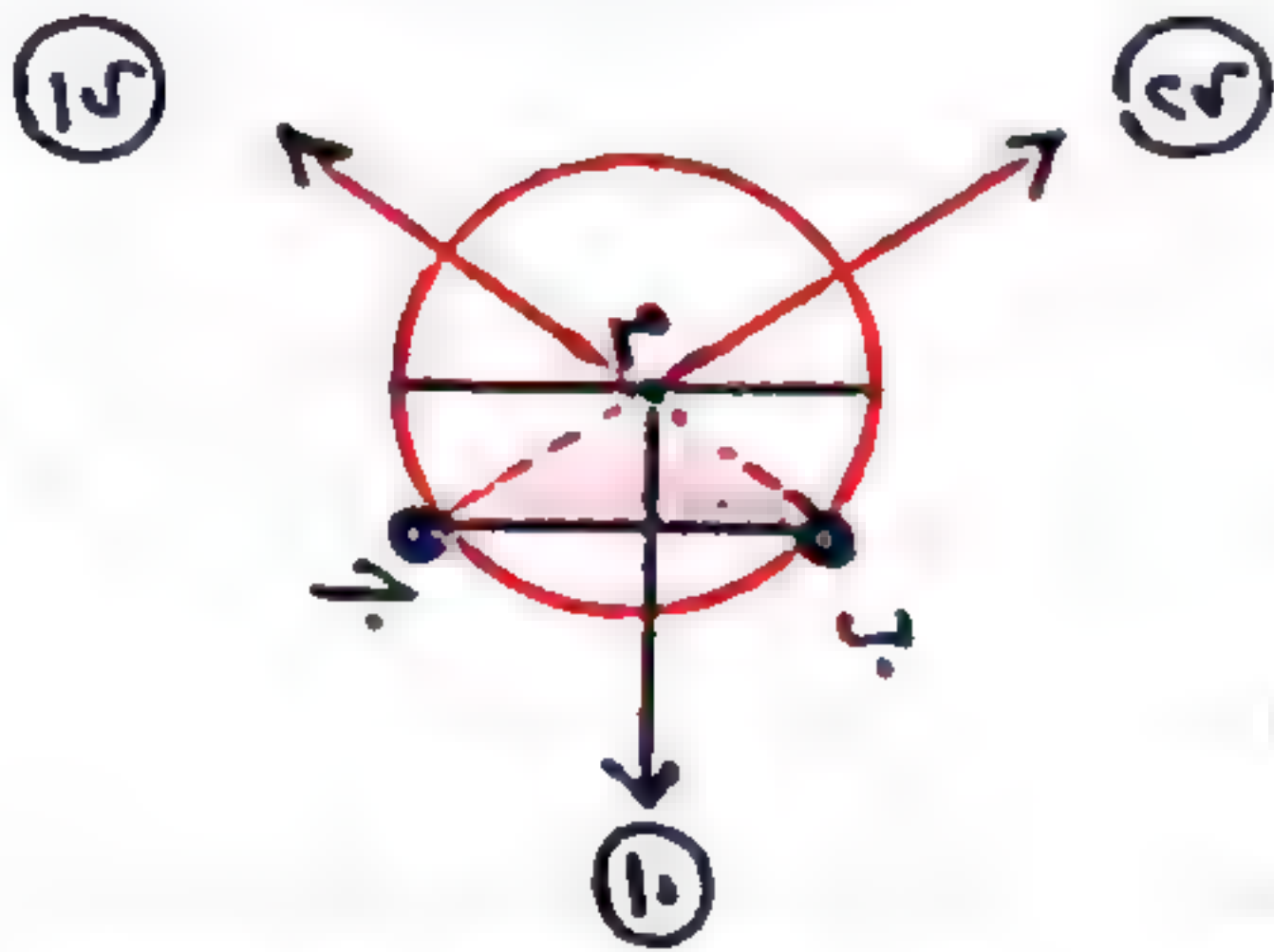


مثلت القوى P ب م

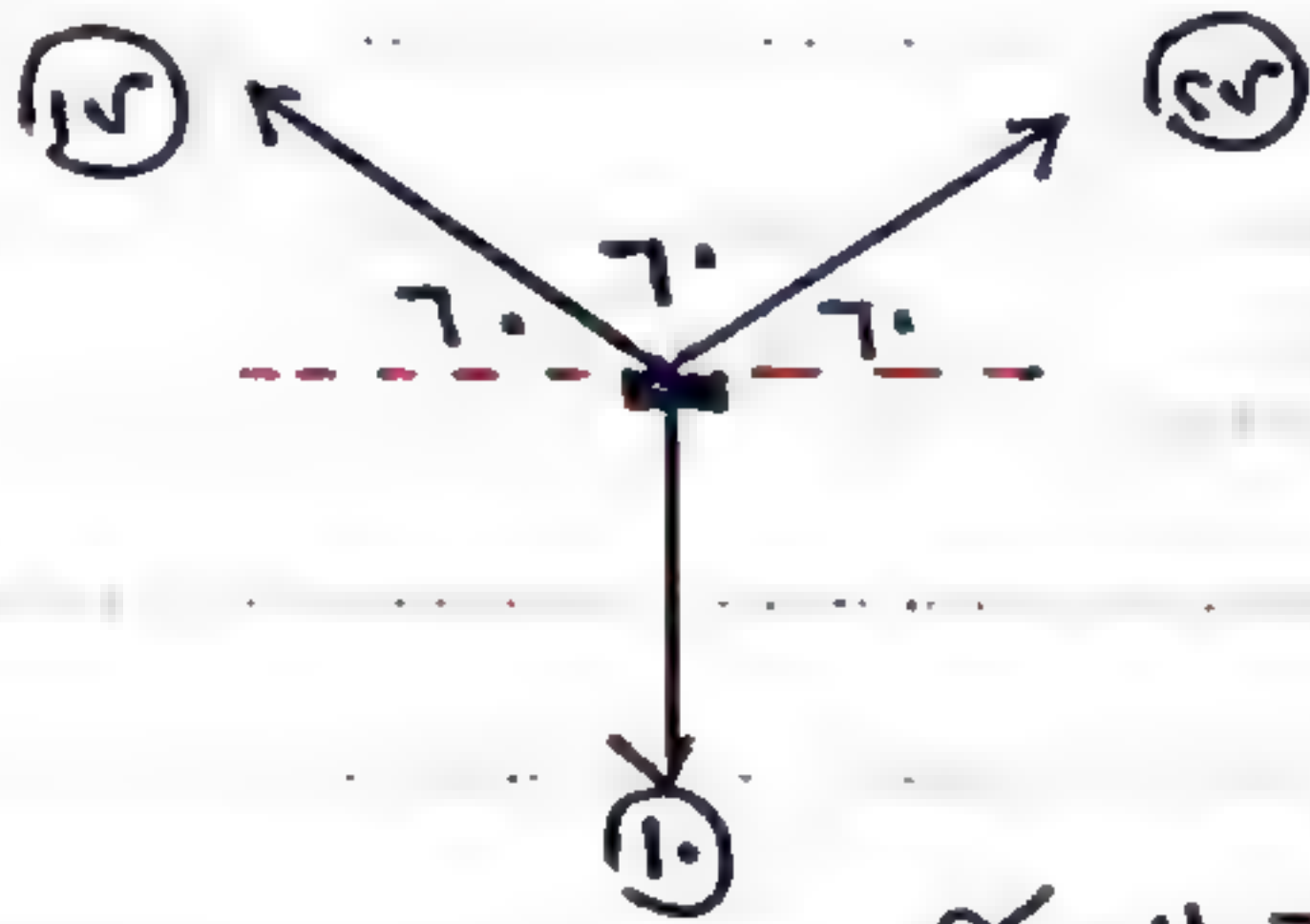
$$\frac{4}{40} = \frac{\text{ش}}{50} = \frac{3}{30}$$

مثال كرة معدنية تم تركها على قنيتين متوازيتين بارتفاع ١٠ سم من مستوى الأرض. احس الارتفاع الذي يقع عليه كل من القنيتين إذا كانت وزنتان ١٠ و ١٥ نيوتن؟

الحل



Δ م ب د متساوي الأضلاع - بالمعلم



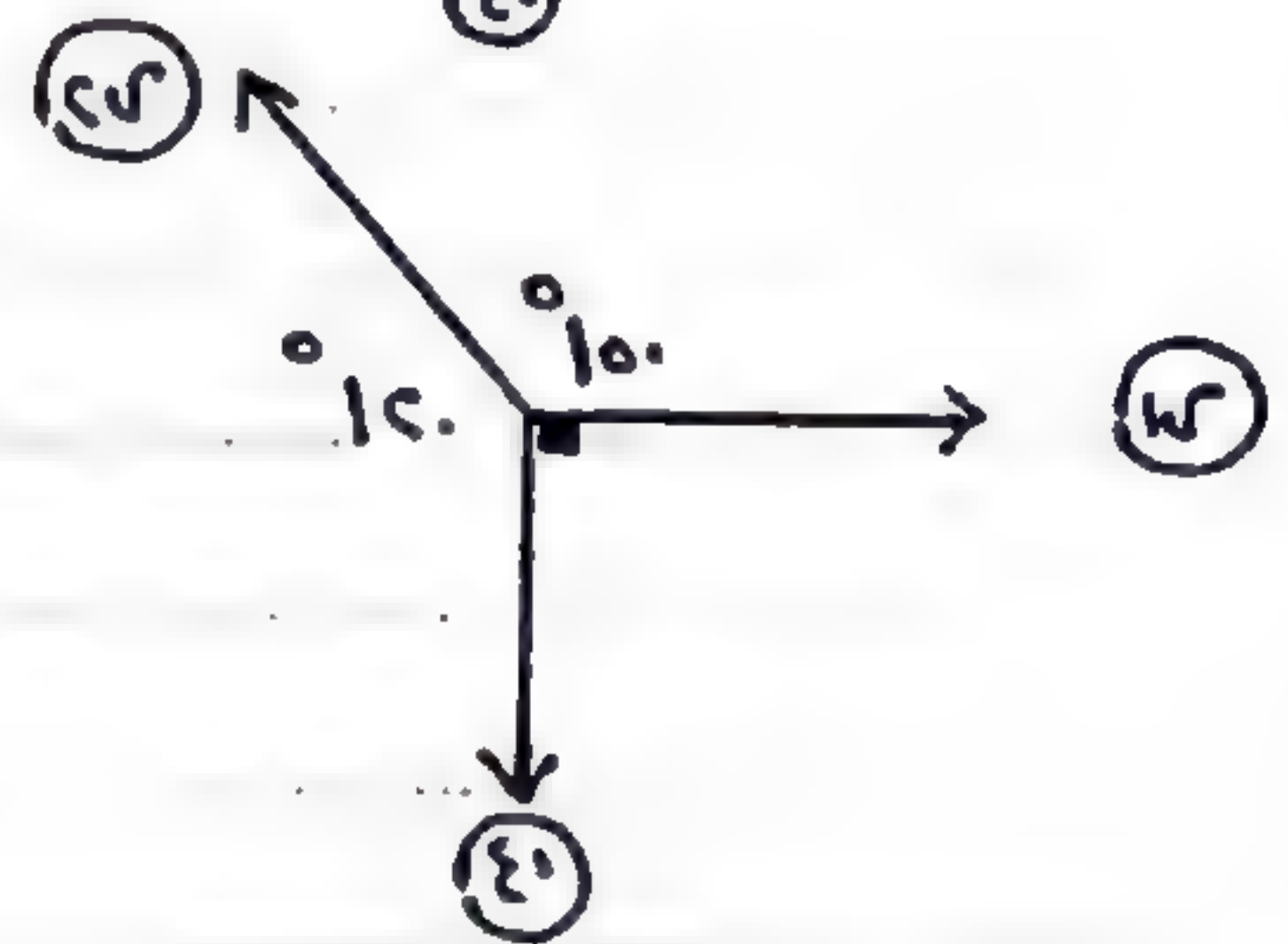
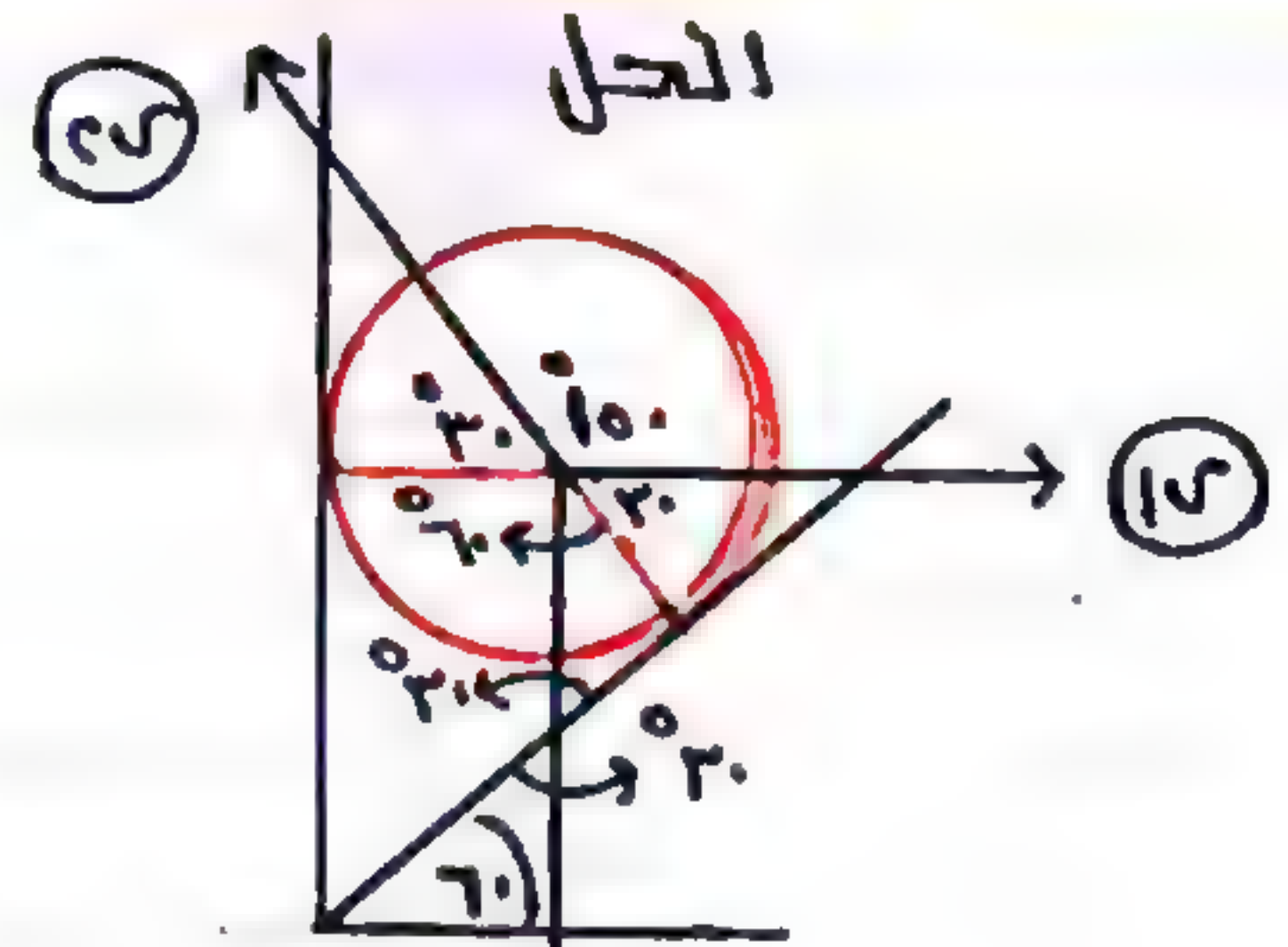
قاعدة لامي

$$\frac{10}{7.0 \text{ ح.ا}} = \frac{15}{10.0 \text{ ح.ا}} = \frac{15}{10.0 \text{ ح.ا}}$$

$$15 = \frac{10.0 \text{ ح.ا} \times 10}{7.0 \text{ ح.ا}} = \frac{100}{7} \approx 14.3 \text{ نيوتن}$$

$$10 = \frac{10.0 \text{ ح.ا} \times 15}{7.0 \text{ ح.ا}} = \frac{150}{7} \approx 21.4 \text{ نيوتن}$$

مثال كرة من الحديد وزنها ٤٠ نيوتن مسقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الأفق بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل؟



قاعدة لامي - بالمعلم

$$\frac{40}{10.0 \text{ ح.ا}} = \frac{15}{9.0 \text{ ح.ا}} = \frac{15}{12.0 \text{ ح.ا}}$$

$$15 = \frac{12.0 \text{ ح.ا} \times 40}{10.0 \text{ ح.ا}} = 48 \text{ نيوتن}$$

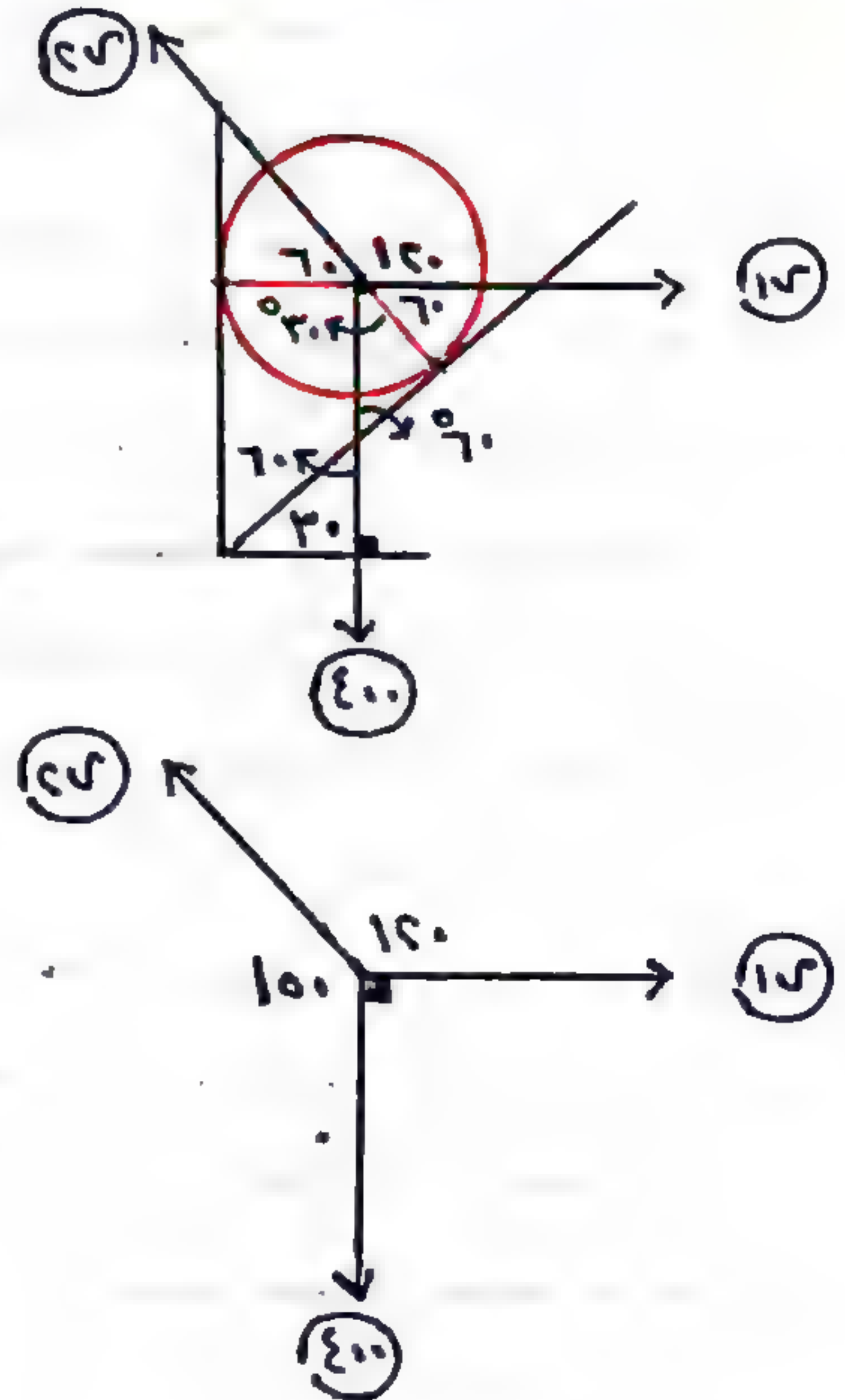
$$40 = \frac{9.0 \text{ ح.ا} \times 40}{10.0 \text{ ح.ا}} = 36 \text{ نيوتن}$$

$$\frac{٤١١}{١٢٠ \text{ حا}} = \frac{٢٥}{٩٠ \text{ حا}} = \frac{١٥}{١٥٠ \text{ حا}}$$

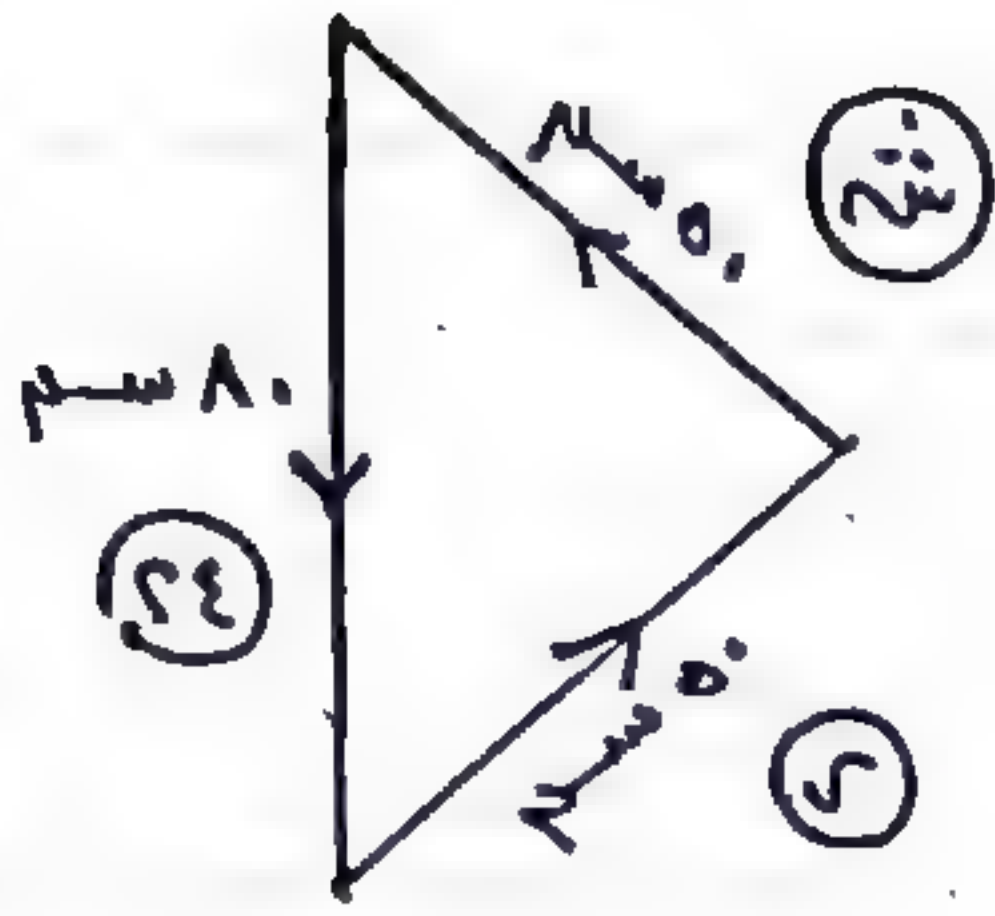
$$١٥ = \frac{١٥٠ \text{ حا} \times ٤١١}{١٢٠ \text{ حا}} = ٥٢٠,٩ \text{ كجم}$$

$$٢٥ = \frac{٩٠ \text{ حا} \times ٤١١}{١٢٠ \text{ حا}} = ٣٠٦,٩ \text{ كجم}$$

مثال كرة معدنية وزنها ٤١١ كجم
يؤثر فيه مركزها مومنة بين مستويين
أوليين أحدهما رأسها والآخر يميل
على الرأس بزاوية ٥° أوجد رد
فعل كل من المستويين؟
الحل



طيف يا جيب قاعدة لا مكا

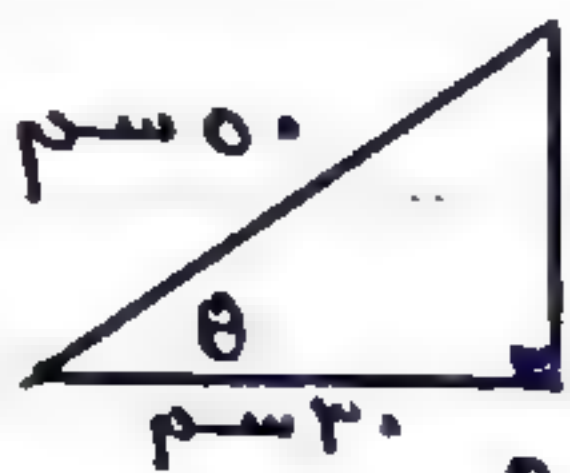


قاعدة مثلث القواعد

$$\frac{24}{80} = \frac{50}{x} = \frac{24}{80}$$

$$24 = \frac{24 \times 50}{80} = 15 \text{ سم}$$

$$5 = \frac{24 \times 50}{80} = 15 \text{ سم}$$



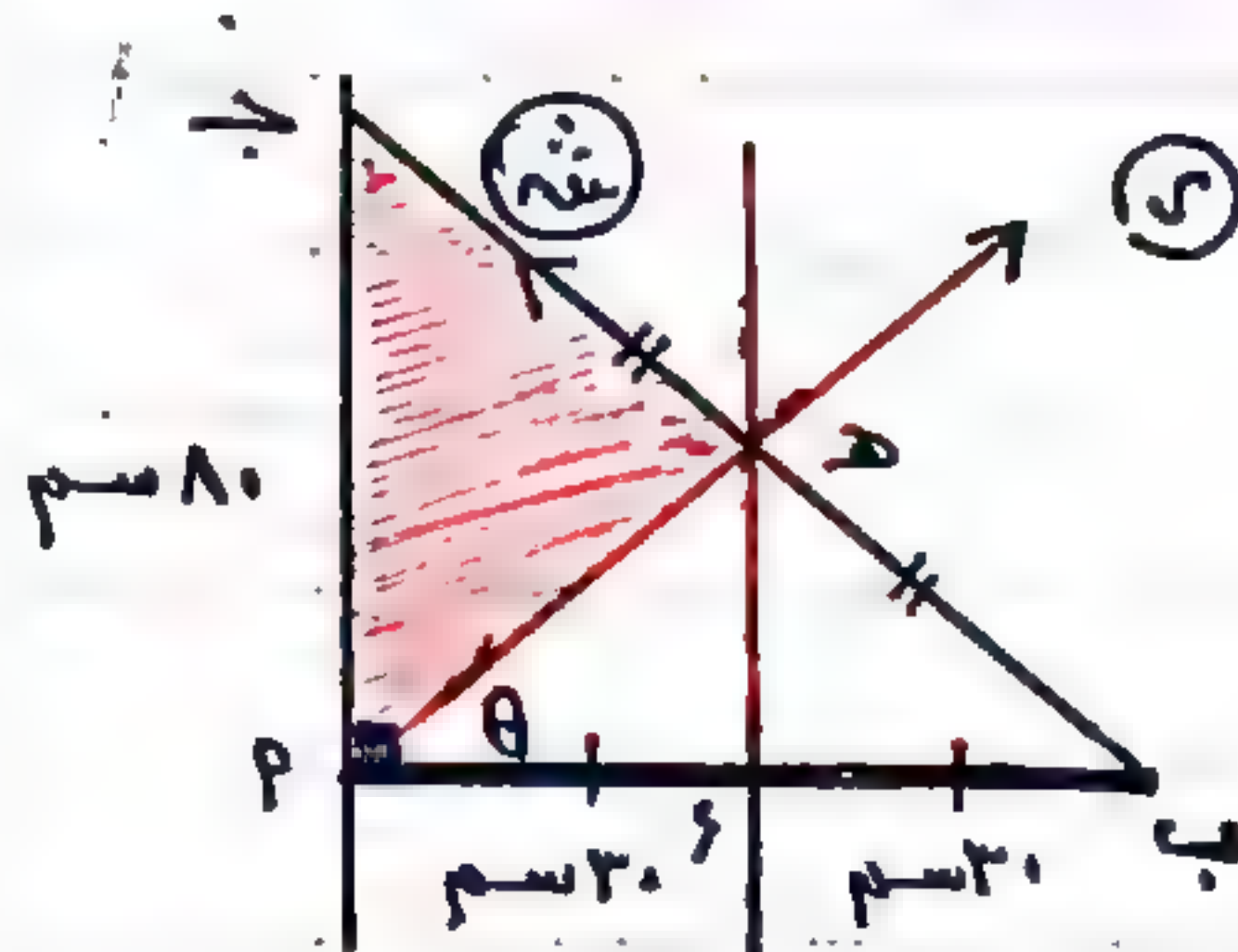
$$\frac{30}{50} = \theta$$

$$\therefore \theta = 36.87^\circ$$

خطي باللك هو قال القضيبي ان ن
فك وحشي افضك

مثال \overline{AB} قضيب منتظم طوله ٨٠ سم
وزنه ٢٤ كجم يؤتى في نقطة (٢)
منتصف \overline{AB} \overline{AC} القضيب متصل طرفه (٢)
بمفصل في حائط رأسه وطرفه (ب)
مربوط في أحد نهايتك حبل خفيف
مثبت نهايته الأخرى في نقطة (ج)
على الحائط تقع فوق (٢) تماماً وعلى
بعد ٨٠ سم من (٢) فإذا ارتن القضيب
فك وضعه أفقياً. أوجد الشد في الحبل
ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند (٢)

الحل



$$\overline{BC} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ سم}$$

$$= 100 \text{ سم}$$

\overline{AP} متوسط خارج من رأس القائمة

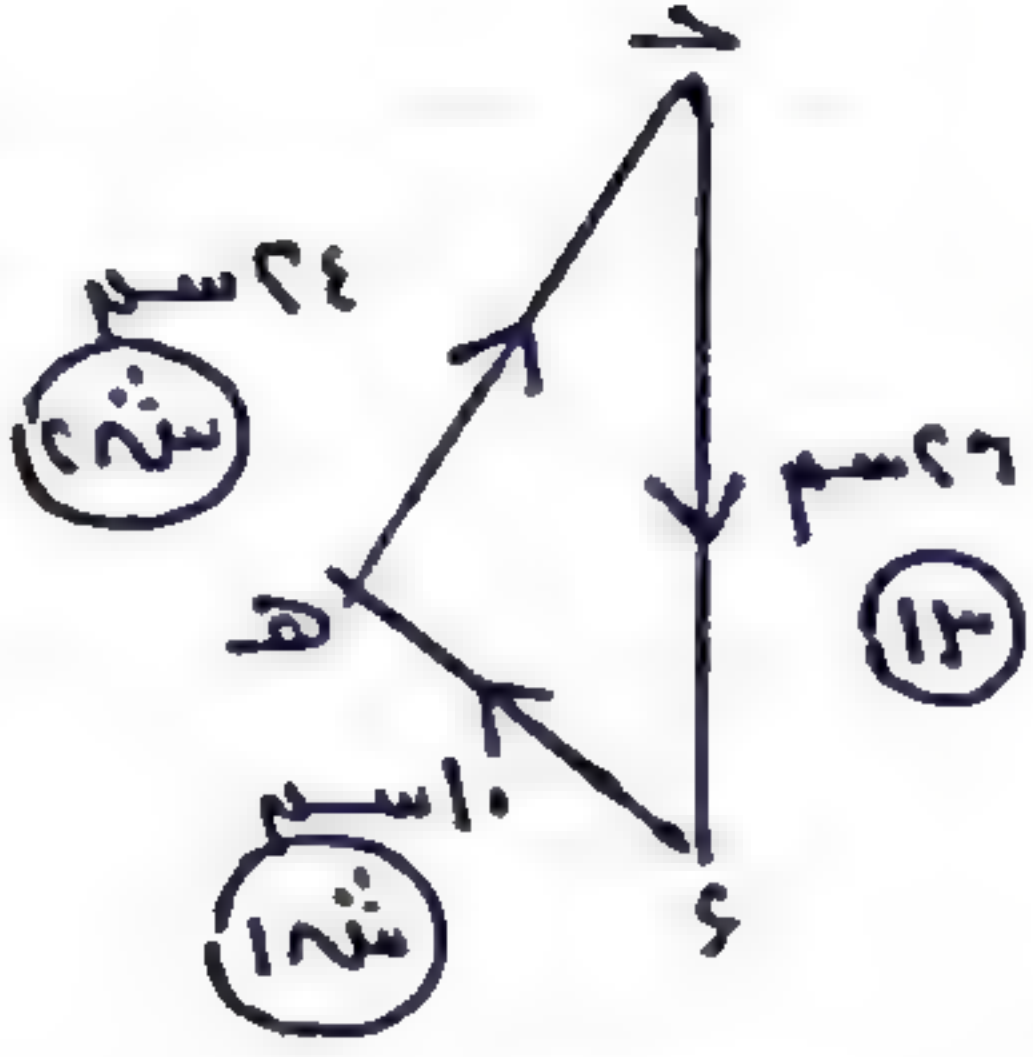
$$\therefore \overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ سم}$$

حد حسيلاً لنفعلنا إذا ه منتصف \overline{BC}

لأنه يامعلم ومنتصف \overline{AB} \overline{AC} $\parallel \overline{BC}$

ه منتصف \overline{BC} بس كما

وطيناً ومنتصف \overline{AB} لأن القضيب منتظم



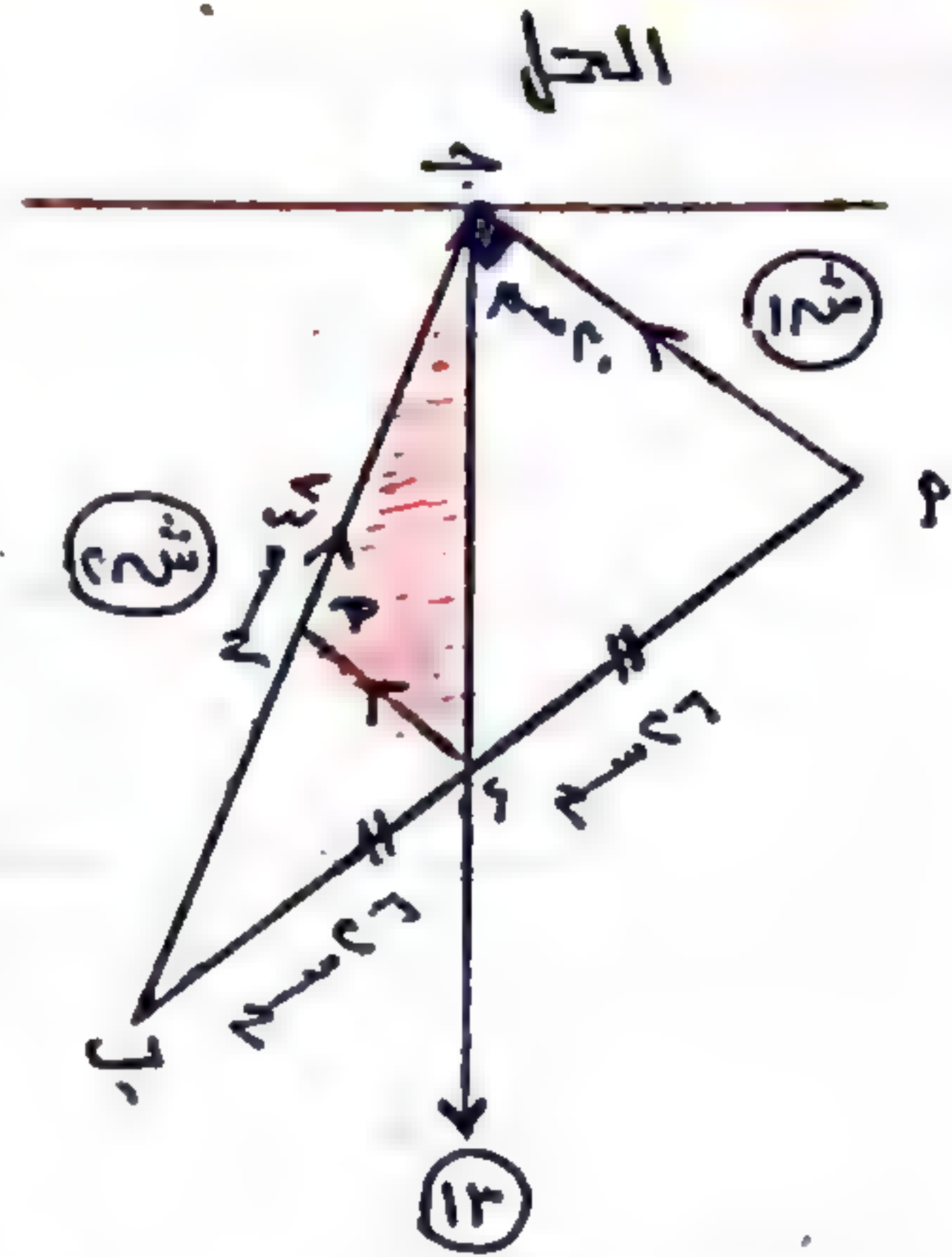
قاعدة مثلث القوس

$$\frac{\text{ش ٢٤}}{\text{ش ٢٦}} = \frac{\text{ش ١٠}}{\text{ش ١٢}} = \frac{١٣}{٢٦}$$

$$\text{ش ١٢} = \frac{١٣ \times ١٠}{٢٦} = ٥ \text{ بيوت}$$

$$\text{ش ٢٦} = \frac{١٣ \times ٢٤}{٢٦} = ١٢ \text{ بيوت}$$

مثال علق قسيب منتظم ملوله ٥٢ سم ووزنه ١٣ بيوت بيوت في منتصفه علق من طرفيه بخيطين وثبت طرفهما في نقطة في السقف فإذا كان طول أحد الخيطين ٢٠ سم و ٢٨ سم، أوجد الخيط الآخر ومنه الاثران مقدار كل من الشد في الخيطين؟



$$\text{سم ٢٠} + \text{سم ٢٨} = \text{سم ٢٦}$$

∴ سم ٢٠ ج ب قائم في ج

رسمنا د ه يوازي ج د

∴ مسقط ج ب (القسيب منتظم)

∴ ه منتصف ج د ∴ د ه = ٢٤ سم

$$\text{سم ٢٠} = \frac{\text{د ه}}{\text{ج د}} = \frac{٢٤}{٢٦} = \frac{١٠}{٢٦} = \frac{١٠}{٢٦} \times ٢٠ = ١٠ \text{ سم}$$

∴ د ه متوسط خارج من رأس القائمة

$$\text{سم ٢٨} = \frac{\text{د ه}}{\text{ج د}} = \frac{٢٤}{٢٦} = \frac{١٠}{٢٦} = \frac{١٠}{٢٦} \times ٢٨ = ٢٨ \text{ سم}$$

مثال ٢٠ كضيب ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ كجم يؤثر عند منتصفها والطرف (٢) مثبت بمفصل في حائط رأسه والطرف (١) مربوط في حيط خفيف طوله ٣٦٨٠ سم مثبت طرفه الآخر في (ج) على الحائط فوق رأساً فوق (٢) وعلى بعد من (٢) يساوي ٨٠ سم. فإذا اتزن الساق فأوجد مقدار السد في الحيط ورد فعل المفضل.

الحل

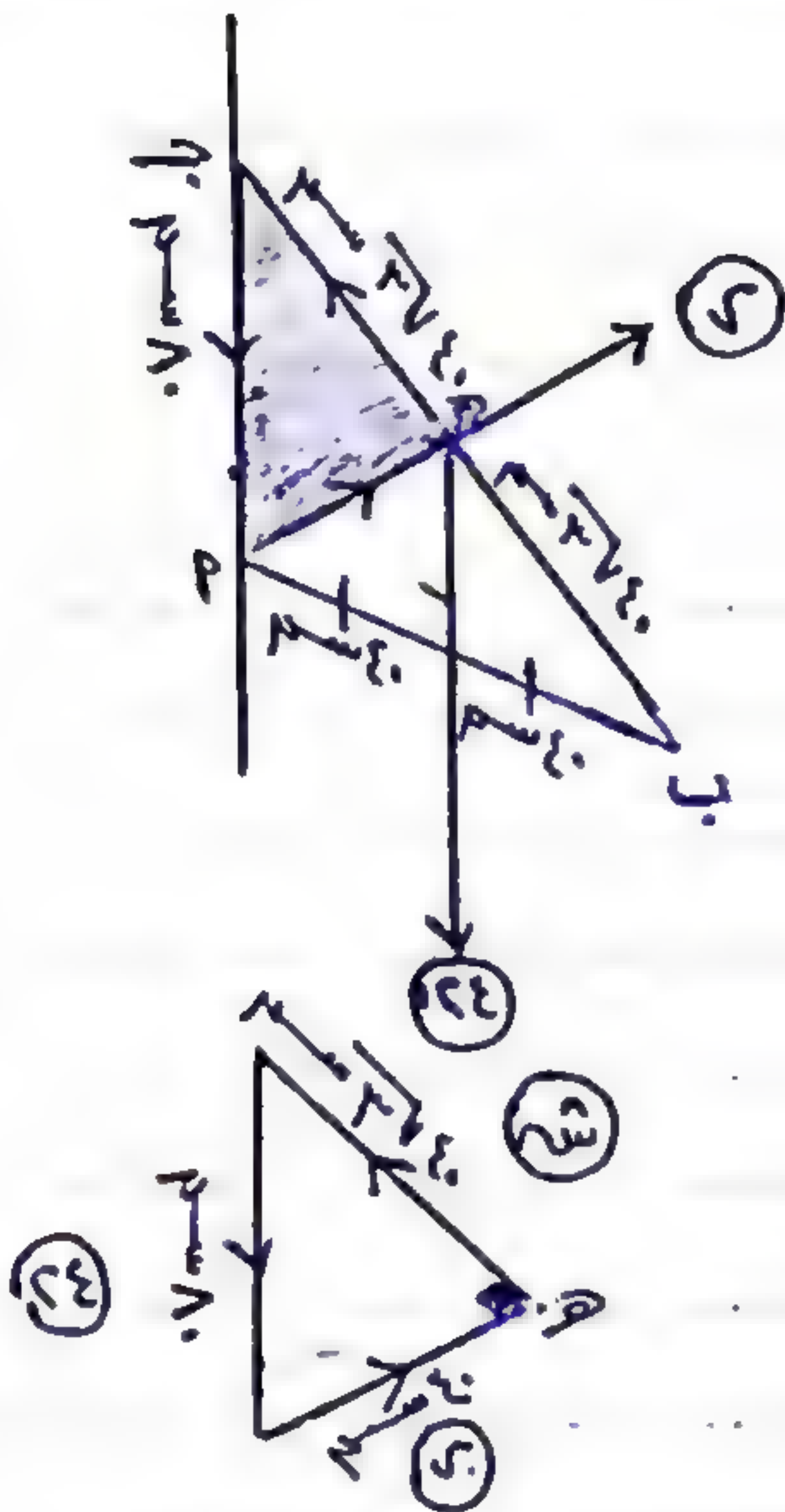
ركز الباشا محدث حل الساق أفقية. أم يمثل بزواوية حادة أو منفرجة مع الحائط عند المفضل.

الحيط = ٣٦٨٠ سم

طول الساق = ٨٠ سم

المسافة الرأسية = ٨٠ سم

← $(3680)^2$ مربع طول الحيط
 = مربع طول الساق + مربع المسافة الرأسية
 $= (80)^2 + (80)^2$
 $\therefore (3680)^2 < (80)^2 + (80)^2$
 هذا يعني أن زواوية ميل القضيبي مع الراس منفرجة.



نحل بالمثل Δ ب ج مساوي الساقين
 \therefore ه منتصف ب ج \therefore Δ ه ب ج قائم
 ف ه

$$\therefore ه ب = \sqrt{(3680)^2 - (80)^2} = 3680 \text{ سم}$$

قاعدة مثلث المثلث:

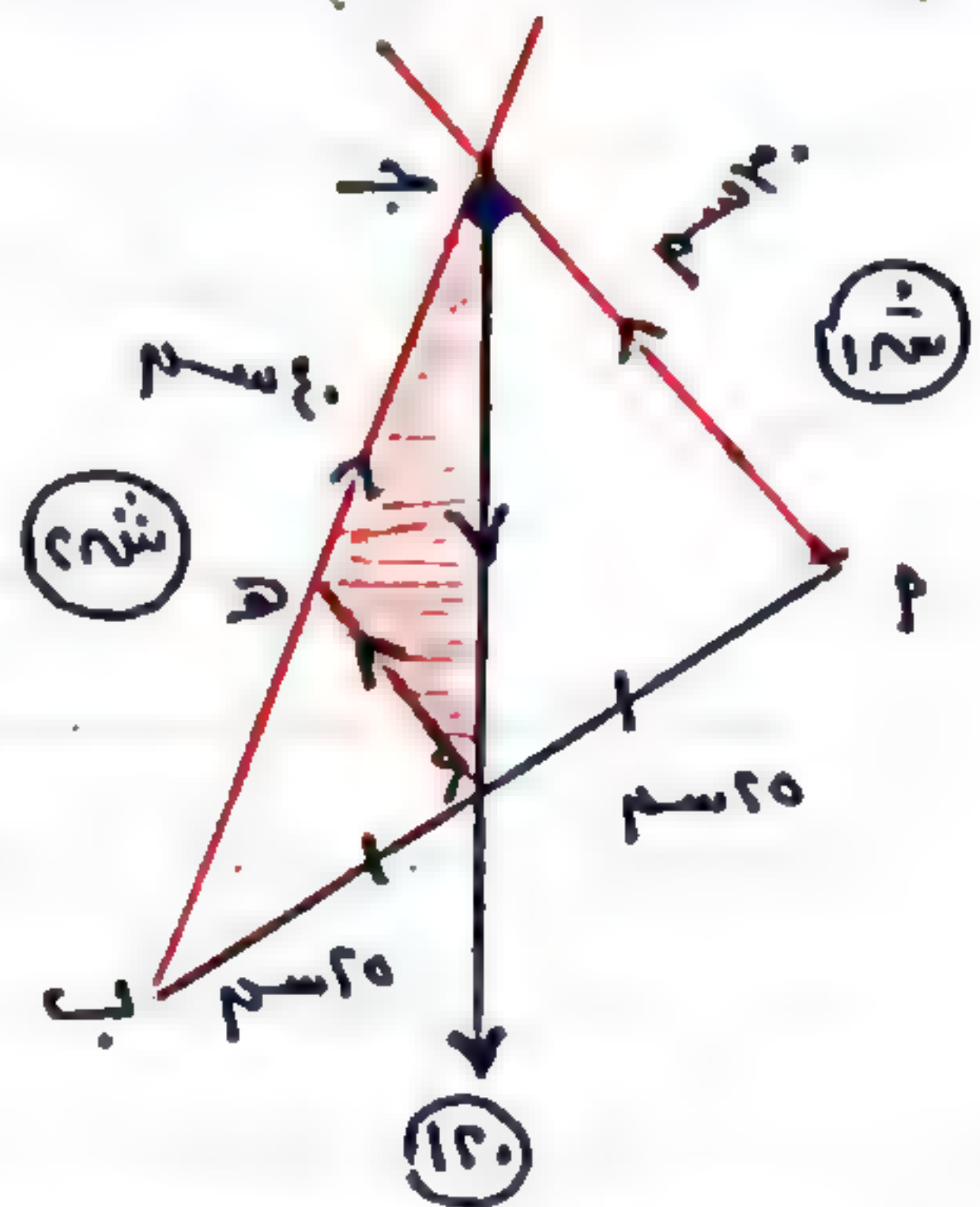
$$\frac{24}{80} = \frac{5}{ه} = \frac{3680}{3680}$$

$$ه = \frac{80 \times 3680}{24} = 12320 \text{ كجم}$$

$$ه = \frac{3680 \times 3680}{80} = 166400 \text{ كجم}$$

مثال قفص مستطيم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ت. جم علق من طرفيه نعليًا خالصًا بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طول الخيطين ٣٠ سم و ٤٠ سم على الترتيب فأوجد مقدار الشد في كل منهما

الحل



القفص مستطيم ∴ منتصف \overline{AB}

$$\therefore PA = PC + PB$$

$$\therefore 50 = 30 + PB \quad \therefore PB = 20$$

∴ \overline{CD} متوسط خارج من رأس القائمة

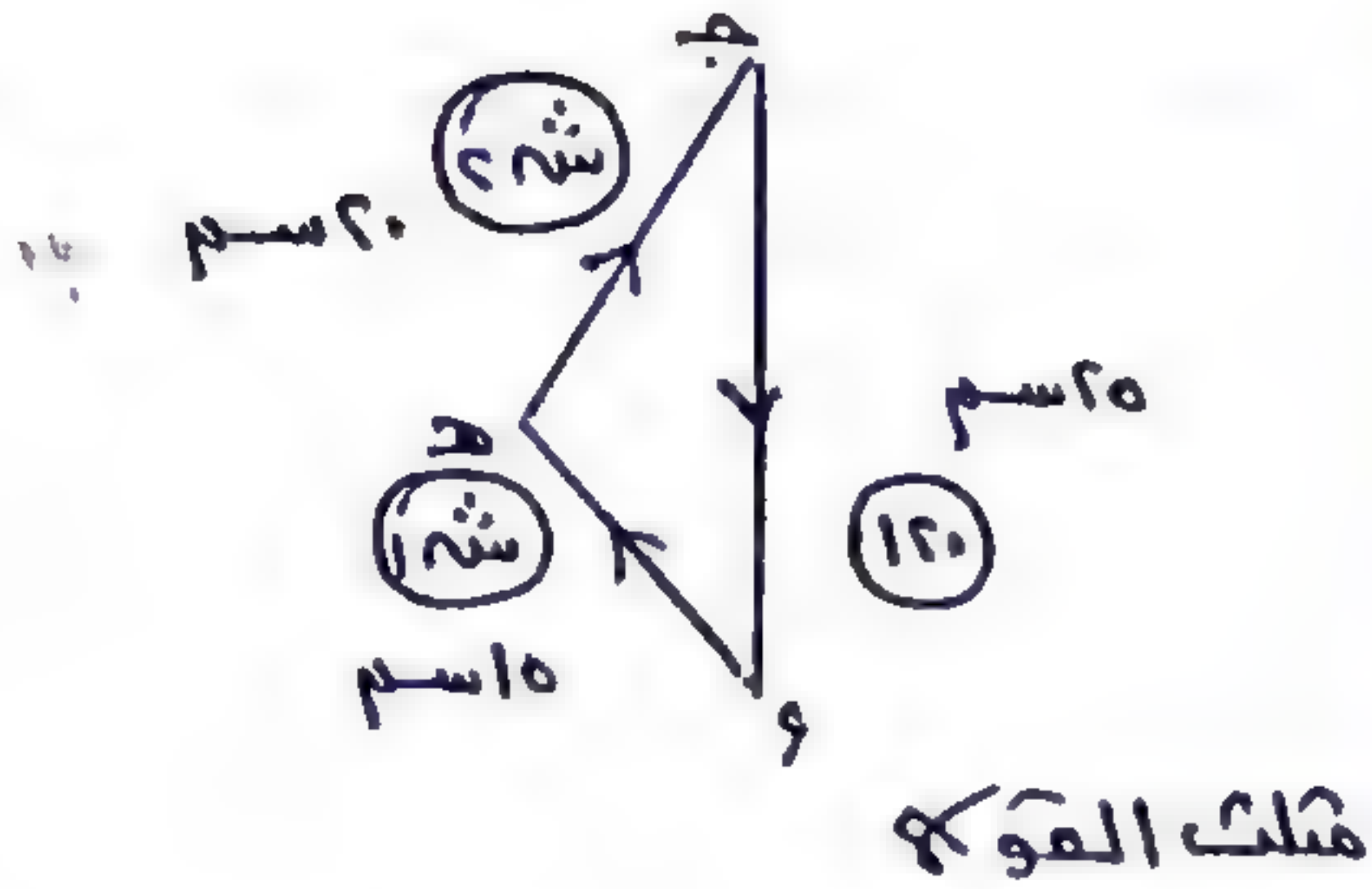
$$\therefore \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{PB} = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ سم}$$

رسمنا $\overline{CD} \parallel \overline{PB}$

∴ \overline{CD} منتصف \overline{PB} ∴ \overline{CD} منتصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{PB} = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{PB} = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ سم}$$



$$\frac{120}{20} = \frac{120}{10} = \frac{120}{20}$$

$$120 = \frac{10 \times 120}{20} = 60 \text{ ت. كجم}$$

$$120 = \frac{20 \times 120}{20} = 120 \text{ ت. كجم}$$

قاعدة للمكعب

$$\frac{١٧}{١٥.٥} = \frac{٢٧}{١٢.٥} = \frac{٢٤}{٩.٥}$$

$$١٧ = ١٢ \text{ نيوتن}$$

$$٢٧ = ١٢ \text{ نيوتن}$$

$$٦٣ = ٦٣ \therefore ٦٣ = ٦٣$$

$$٦٣ = (٦٣) = ٦٣$$

$$\therefore (٦٣) = (٦٣) = (٦٣) \text{ بالنيوتن}$$

$$٦٣ = ٦٣$$

$$\therefore (٦٣) = (٦٣) = (٦٣) = ٦٣$$

وهذا زاوية الميل على الأفق

بمعنى القوس بزاوية

قياسها ٦٣° مع الأفق.

مثال قوس منتظم يرتكز بطرفه على

مستويين أوليين ما ليس بينهما

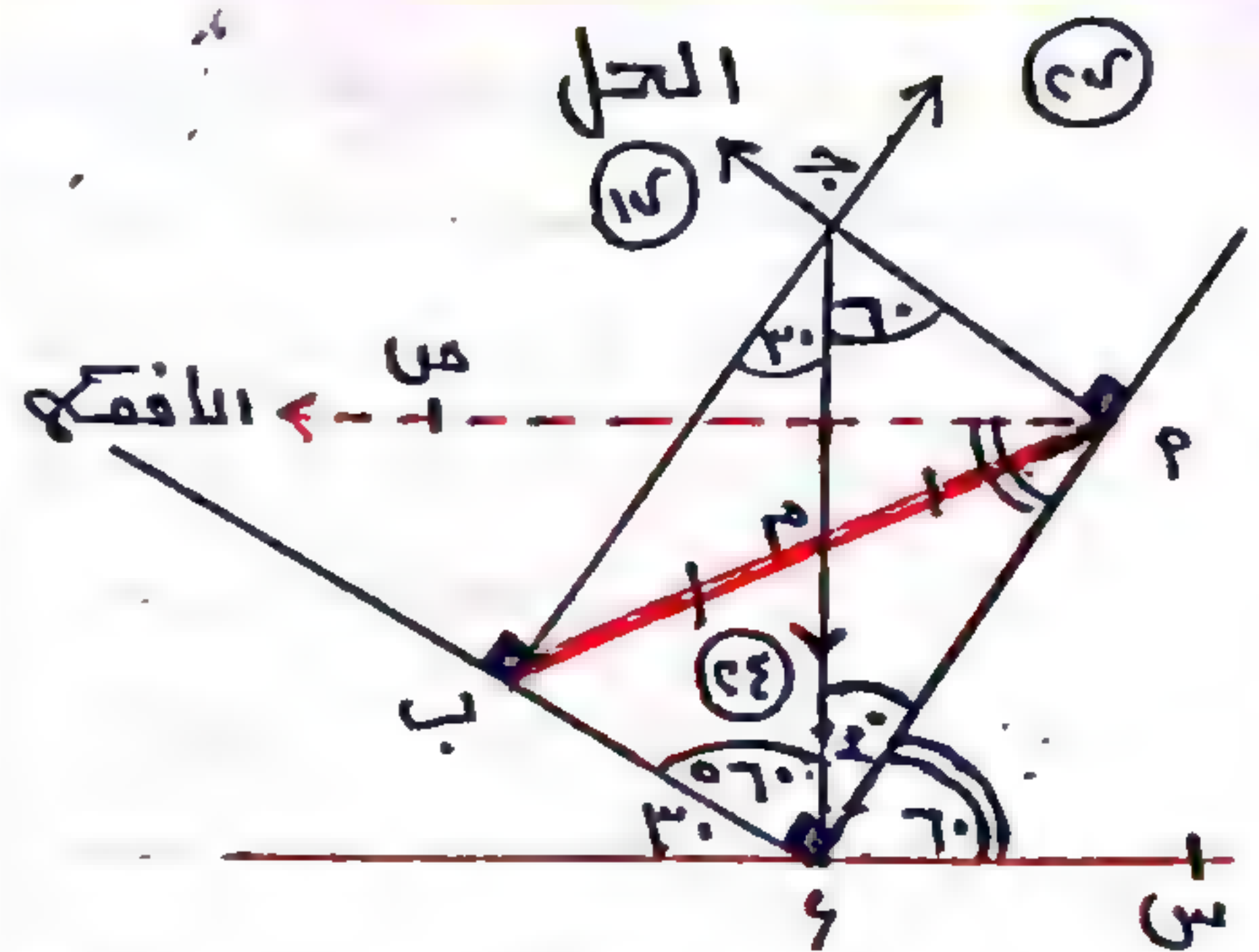
الأفق زاويتين قياسهما ٦٠° و ٣٠°

أوجد قياس الزاوية التي يصنعها القوس

مع الأفق فهو من التوازن وإذا كان

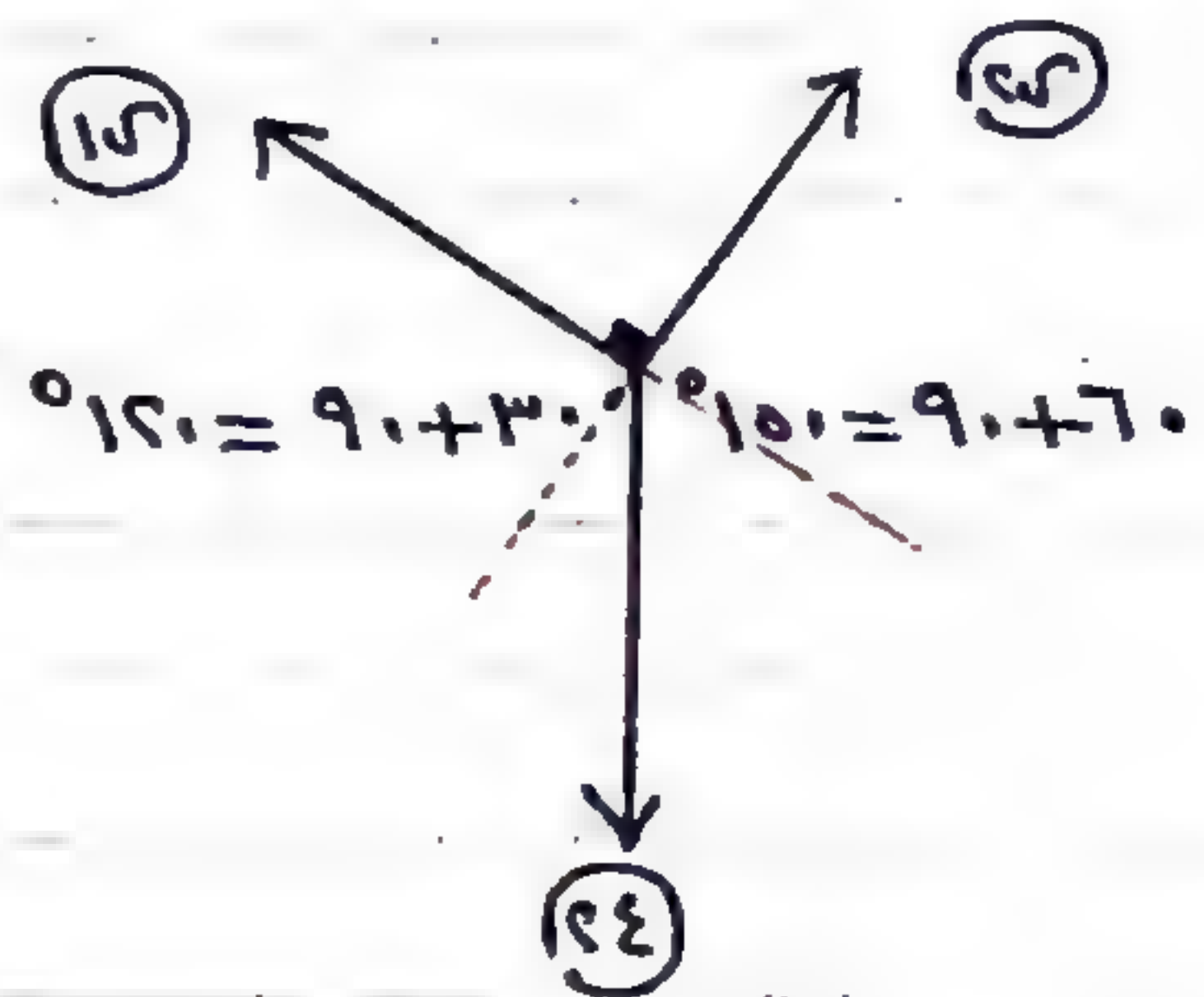
مقار وزنه ٢٤ نيوتن أوجد مقدار

رد فعل كل من المستويين ؟



حده رأسياً ٦٣

سجل نفسك فيه زوايا ميله وكذا



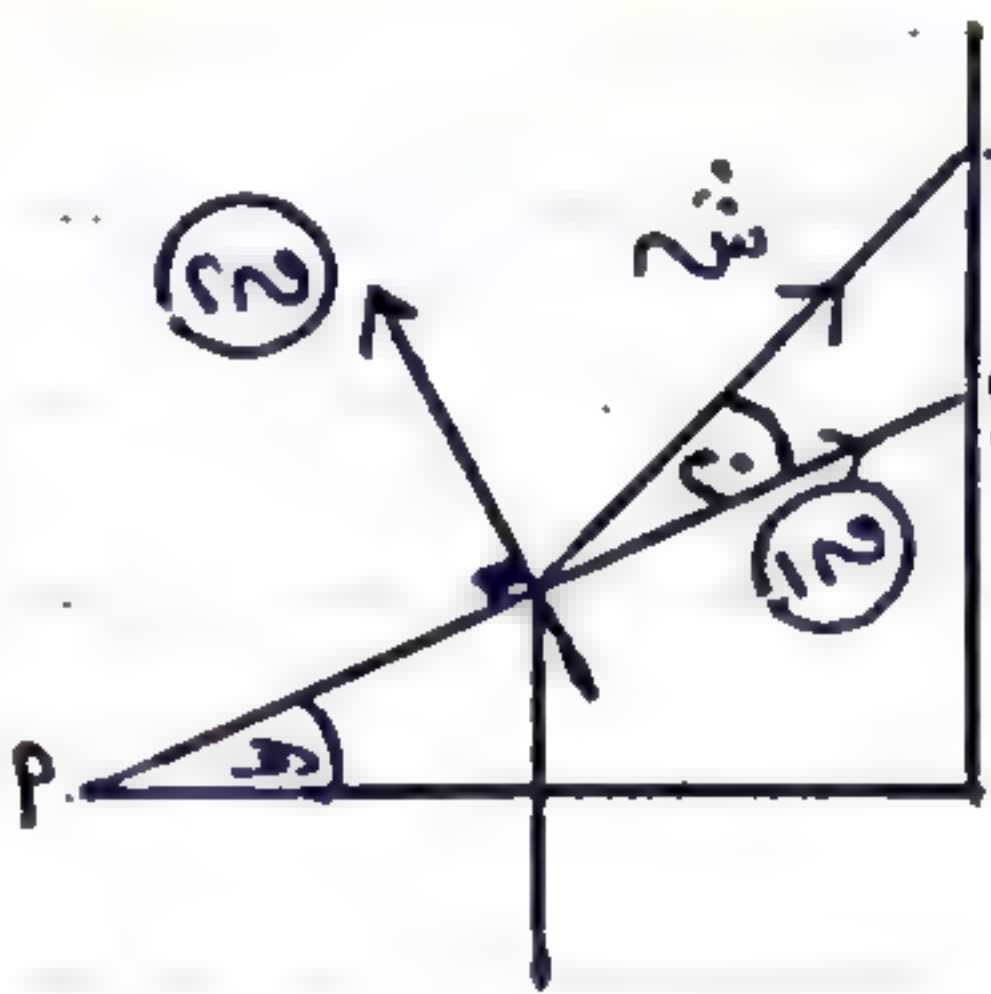
$$\frac{17}{20} = \frac{29}{40} = \frac{17}{20}$$

$$٢٩ = ١٢ \text{ نيوتن}$$

$$٢٠ = ٢٠ \text{ نيوتن}$$

مثال (خاص بالمسوك المائل): كم الشكل التالي

جسم وزنه (١٠) وضع على مسوك مائل يميل على الأفق بزاوية قياسها (٥) ربط بجنب خفيف يميل على المسوك بزاوية قياسها ٢٠ لا على وكان ١٠ و ٢٠ هما مركبتا الشد في اتجاه المسوك والمودع عليه فان:



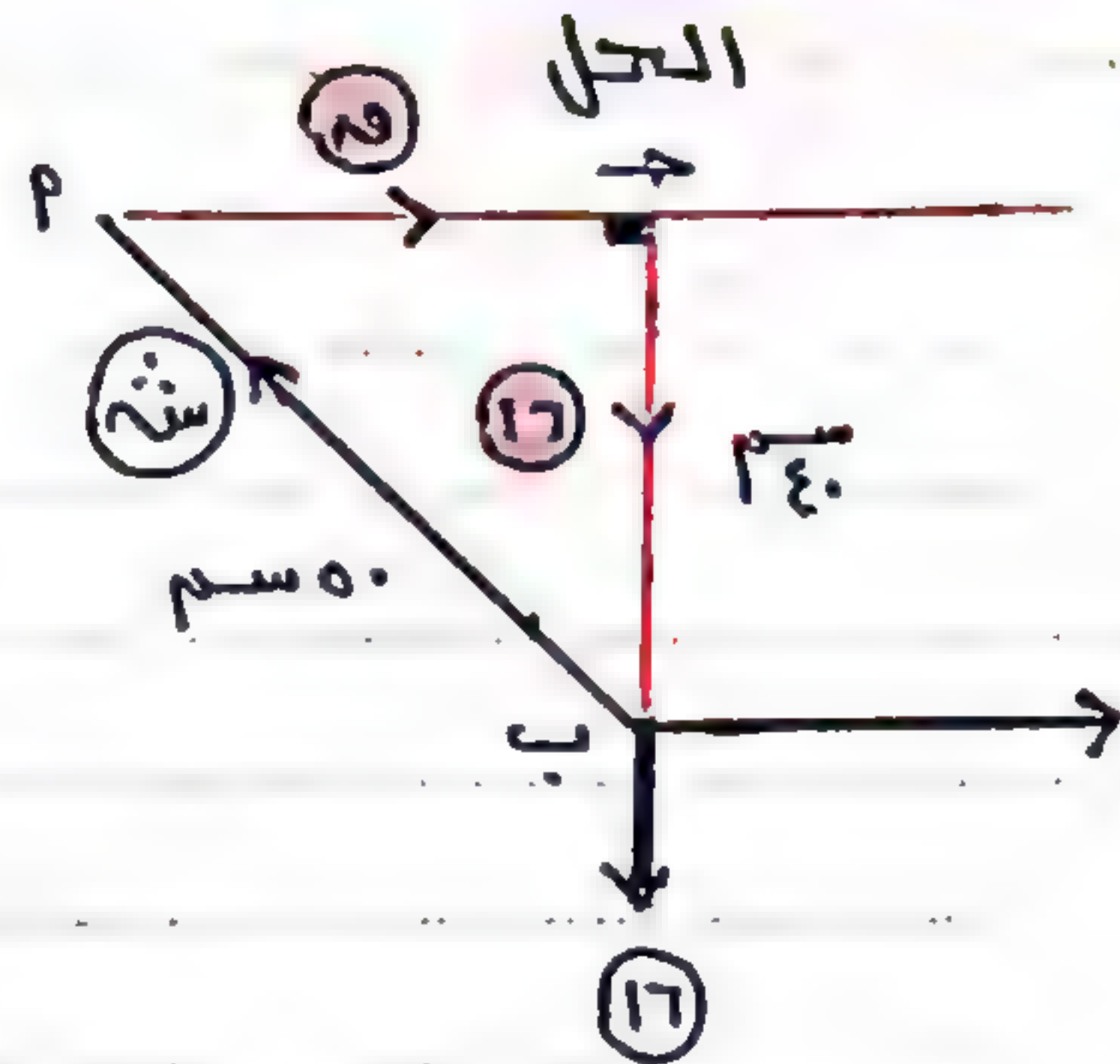
$$\begin{aligned} (١) \text{ شد} &= ١٠ \text{ ق. ٢٠} \\ (٢) \text{ شد} &= ١٠ \text{ جا (٥ + ٢٠)} \\ (٣) \text{ شد} &= ١٠ \text{ جتا ٥} \\ (٤) \text{ شد} &= ١٠ \text{ جا (٥ + ٢٠)} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{نحل شد الكم مركبتان متعامدتان كالتالي:} \\ ١٠ = \text{شد جتا ٢٠} \quad \text{ك ٢٠} = \text{شد جا ٢٠} \\ \therefore \text{شد} = \frac{١٠}{\text{جتا ٢٠}} = ١٢.٥ \text{ ق. ٢٠} \end{aligned}$$

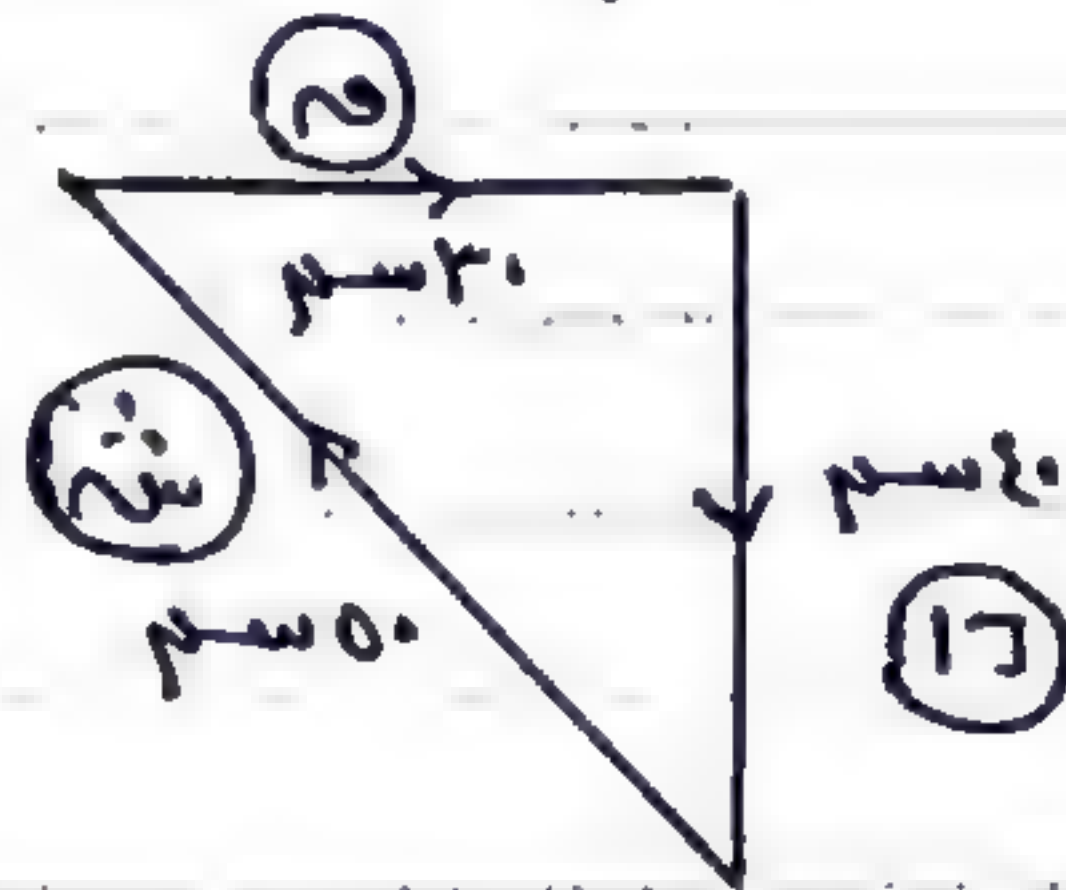
∴ الجواب الصحيح هو (٢)

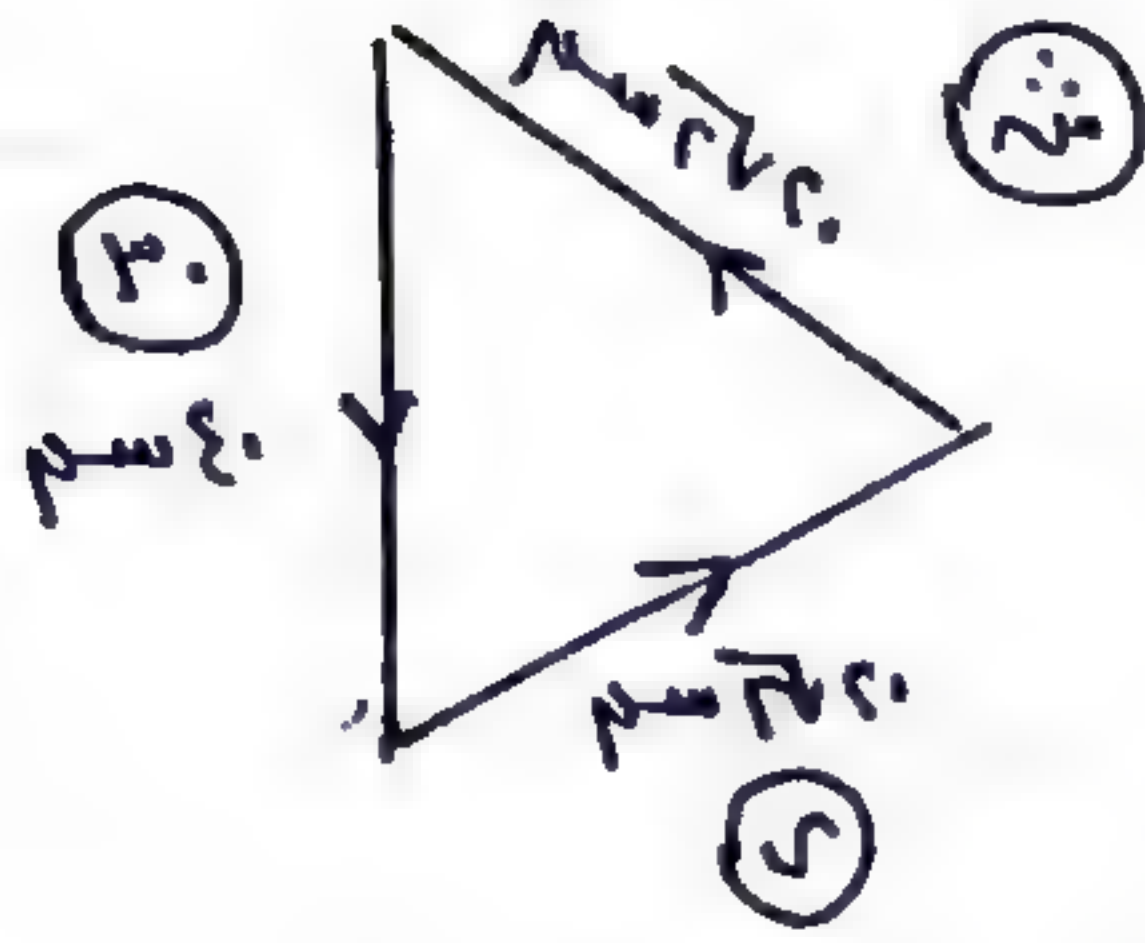
مثال علق ثقل مقدار ١٦ نيوتن في أحد طرفي حبل خفيف طوله ٥٠ سم مسيت طرفه الآخر في نقطة في سقف حجرة ٥ أريج الثقل بقوة أفقية حتى اتزان وهو على بعد ٤٠ سم من السقف أو جد مقدار القوة الأفقية والشد في الحبل ؟



$$٢٩ = \sqrt{٤٠^2 + ٥٠^2} = ٦٥ \text{ سم}$$

قاعدة مثلث القوى لفي وعيش





قاعدة مثلث المثلث

$$\frac{20}{40} = \frac{5}{40} = \frac{4}{40}$$

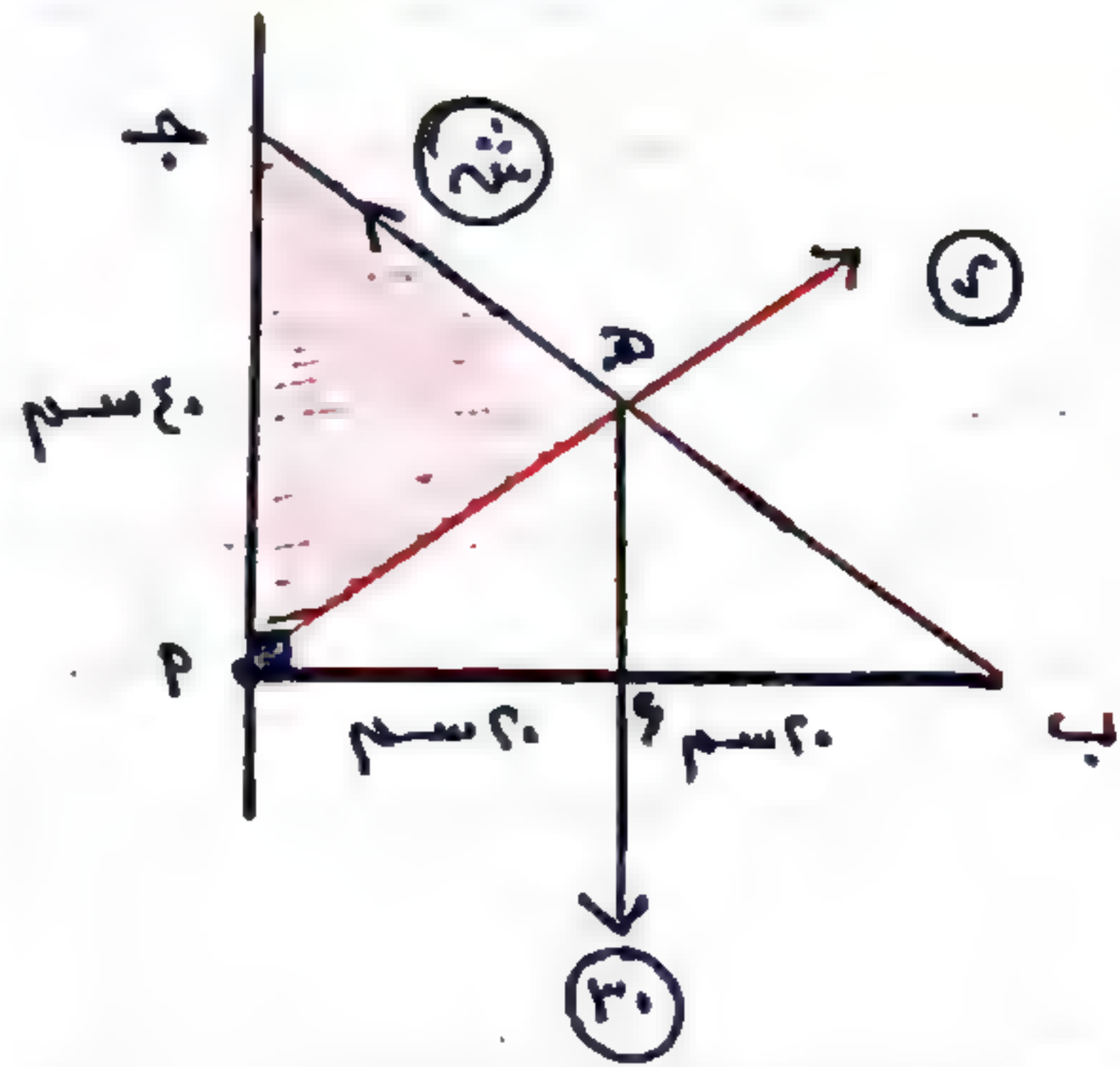
$$\therefore 5 = 10 \text{ ينوتن}$$

$$\# 20 = 10 \text{ ينوتن}$$

جيبك هو قال حفظ القصيد
فك ومنه أفك. خالص الكلام

مثال \overline{AB} قصب مستقيم طوله ٤٠ سم
وزنه ٣٠ ينوتن مقل بمقل في حائل
رأسه عند (P) حفظ القصيد فك وضع
أفك بواسطة حيل حليل في فصل
بطل في القصيد عند (A) ونقطة
(ج) تملو (P) رأساً بمسافة ٤٠ سم
أرجب الشد في الحيل ورد الفل عند (P)؟

الحل



$$AB = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56.57$$

٦٠ مستقيم \overline{AB} (القصيد مستقيم)

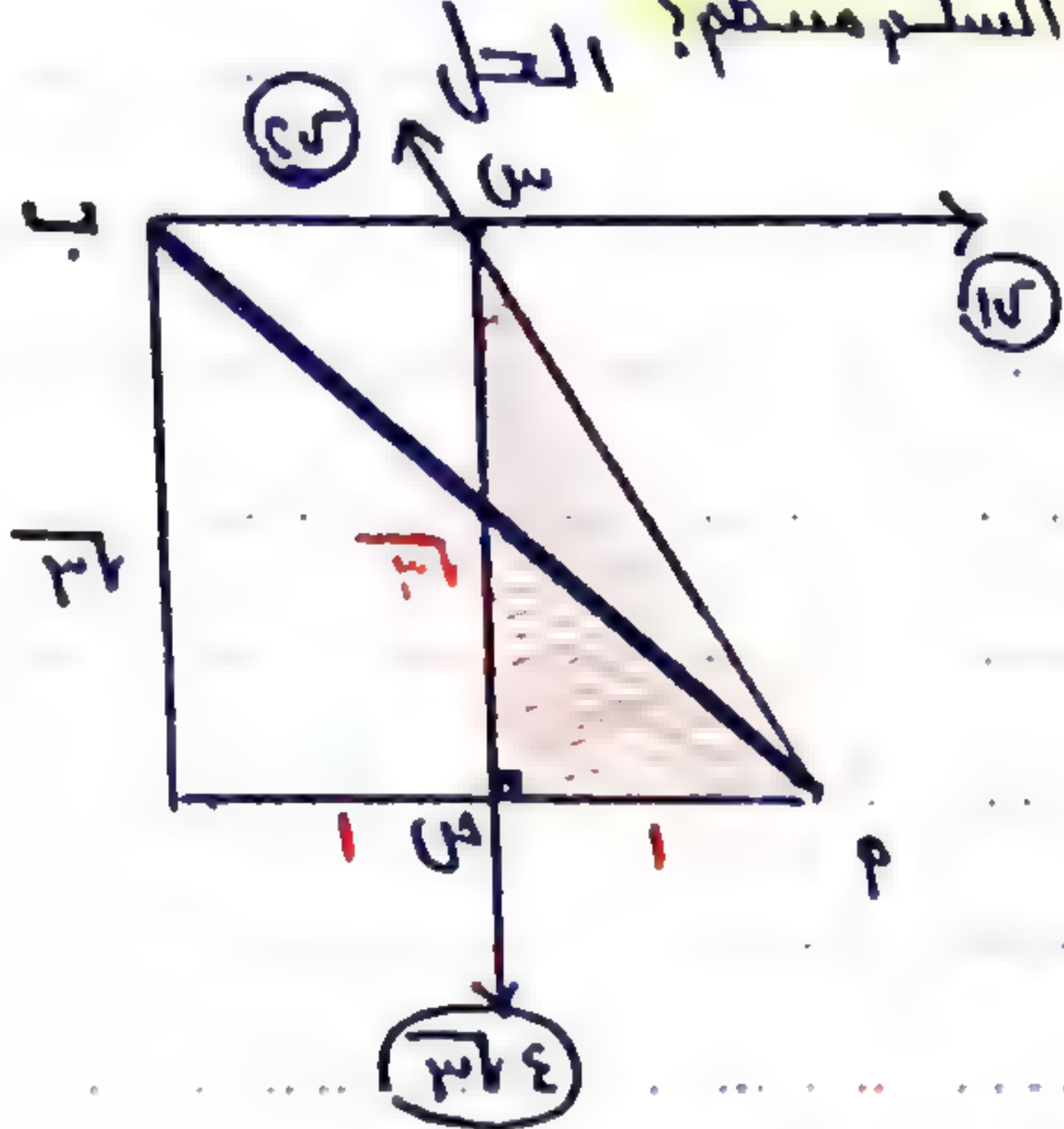
$$\therefore \overline{AH} \parallel \overline{BP} \therefore \text{مستقيم } \overline{AH}$$

$\therefore \overline{AH}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$$\therefore \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 56.57 = 28.28$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 28.28$$

مثال ٢ سلم وزنه ٣٧٤ نيوتن يرتكز بطرفه
 م على ارض افقية خشنة وبطرفه ب على حائط
 (اسك امس) بحيث كان طرفه الملوكة يبعد عن
 سطح الارض ٣٦ متر والطرف الآخر يبعد عن الحائط
 ٢ متر اوجد الضغط على كل من المستويين؟ علما
 بان السلم منتظم؟ **الحل**



٥ من م ٢ قائم ك م
 $\therefore \overline{PM} = \overline{BM} + \overline{BM} = 11 + 1 = 12$ متر

مثلث القوا (س م م) فيه:

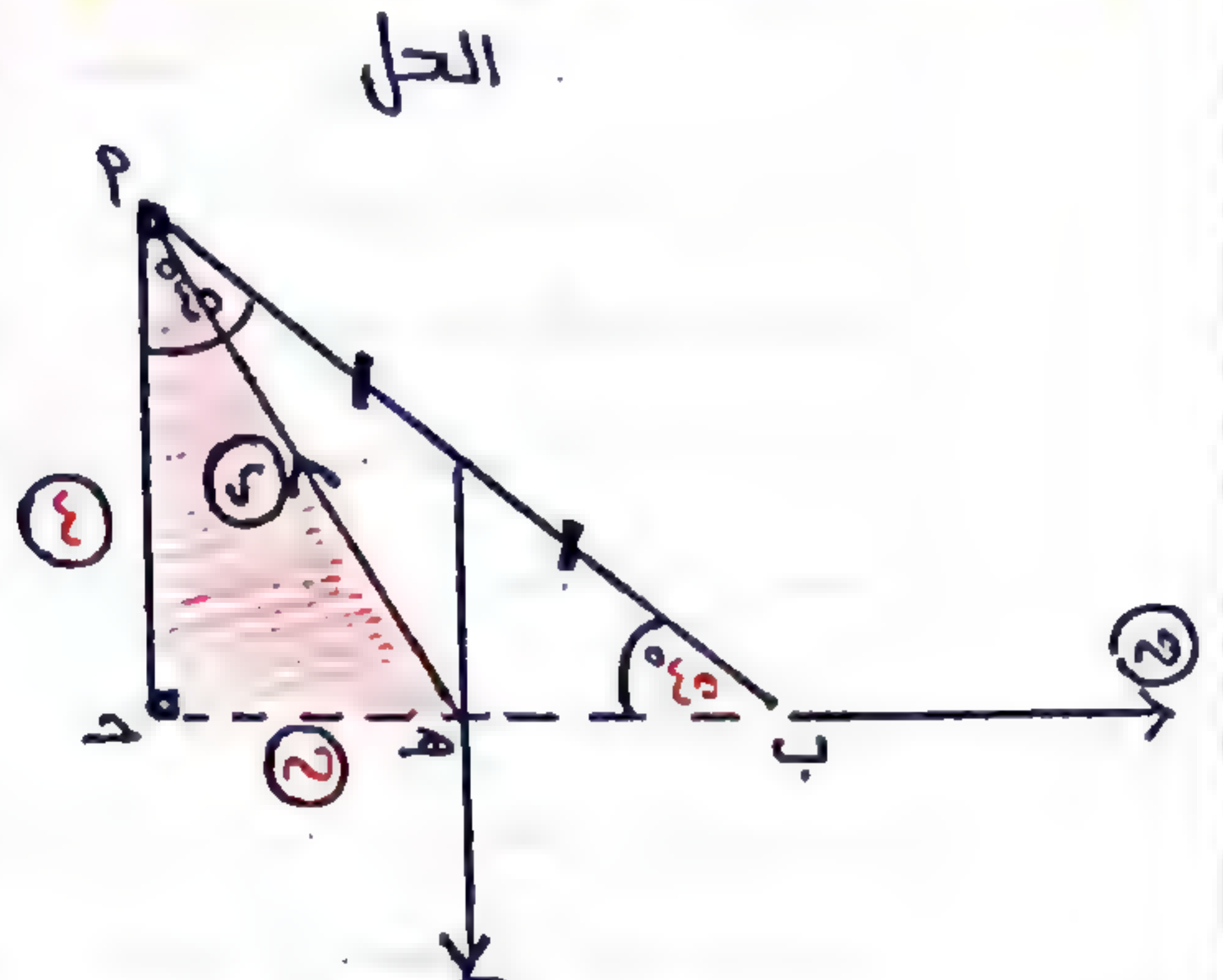
$$\frac{95}{36} = \frac{374}{12}$$

$$\frac{95}{12} = \frac{374}{36}$$

$$\therefore 95 = 12 \times 10.39$$

$$12 = 10.39 \times 12$$

مثال ٢ قضيب منتظم وزنه ٤ ث. كجم
 متصل طرفه م بمفصل ثابت ك حائط رأسه
 أثرت عليه قوة افقية ٥ ك الطرف ب
 اثر في القضيب وهو يعمل على الحائط الرأسه
 بزاوية قياسها ٤٥° احسب مقدار كل من
 القوة ورد فعل المفصل على القضيب؟ **الحل**



٥ ب ج متساوي الساقين (٤ ج = ٤ ب ج)

نفر من ٤ ج = ٤ ب ج = ٤ ث

$\therefore \overline{BD} = \overline{DL}$ نصف ب ج

٥ ه ج القائم ك ج

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{(\overline{DL})^2 + (\overline{BL})^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

بتطبيق قاعدة مثلث القوا (٥ ه ج)

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\therefore 4 = \frac{2 \times 4}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ ث. كجم}$$

$$\# \text{ بالمثل } 5 = 2\sqrt{2} \text{ ث. كجم}$$

① المستقيمات والمستويات في الفراغ.

← تذكر أتع:

■ النقطة:

مكان ناتج من تقاطع خطين مستقيمين أو منحنيين أو مستقيم ومنحنى.

■ الخط المستقيم:

مجموعة غير منتهية من النقاط تقع جميعاً على استقامة واحدة حيث يقبل المستقيم بنقطتين.

■ المستوى:

مجموعة غير منتهية من النقاط عليها المستقيم في جميع الأوضاع.

■ الفراغ:

مجموعة غير منتهية من النقاط ويقبل المجموعة الشاملة التي تحتوي المستقيمات والمستويات والجسمات.

← يقيس المستوي:

■ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الشكل (١)

■ مستقيم ونقطة خارجة

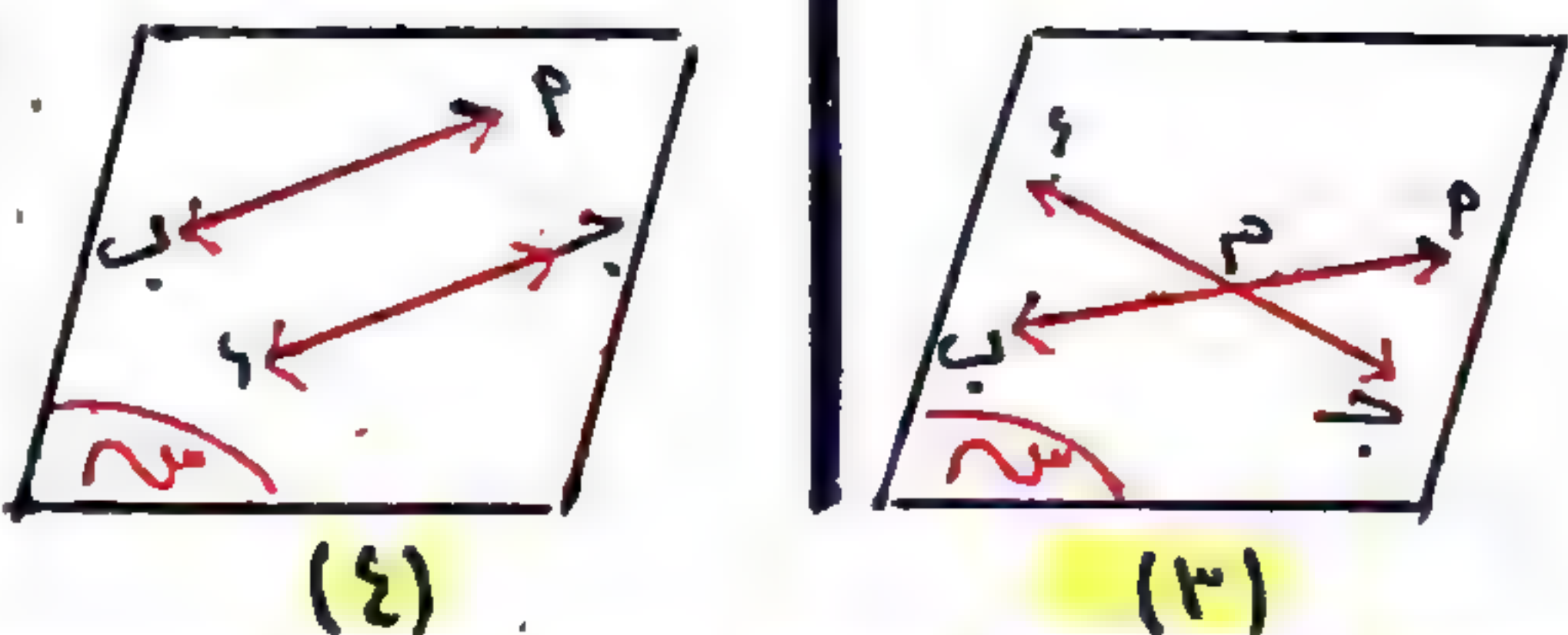
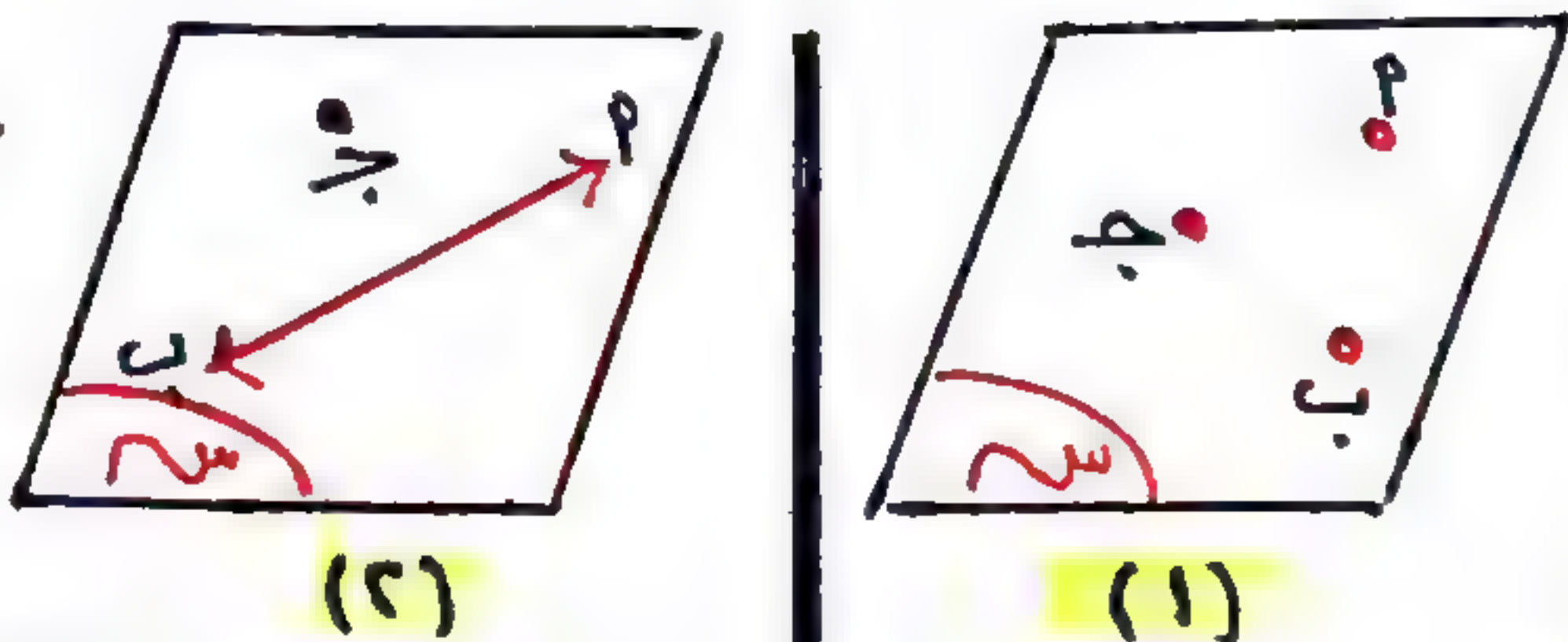
الشكل (٢)

■ مستقيمان متقاطعتان

الشكل (٣)

■ مستقيمان متوازيان غير منطبقان

الشكل (٤)



ملاحظات حلوة أتع:

■ أتع نقطة في المستوى يمر بها عدد لا نهائياً من المستقيمات.

■ أتع نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائياً من المستويات وأيضاً عدد لا نهائياً من المستقيمات.

← الملاقاة بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

المستويان متوازيان .

$$S \cap P = \emptyset$$

$$\therefore S \parallel P$$

← الشكل (١)

المستويان منطبقان .

$$S = P$$

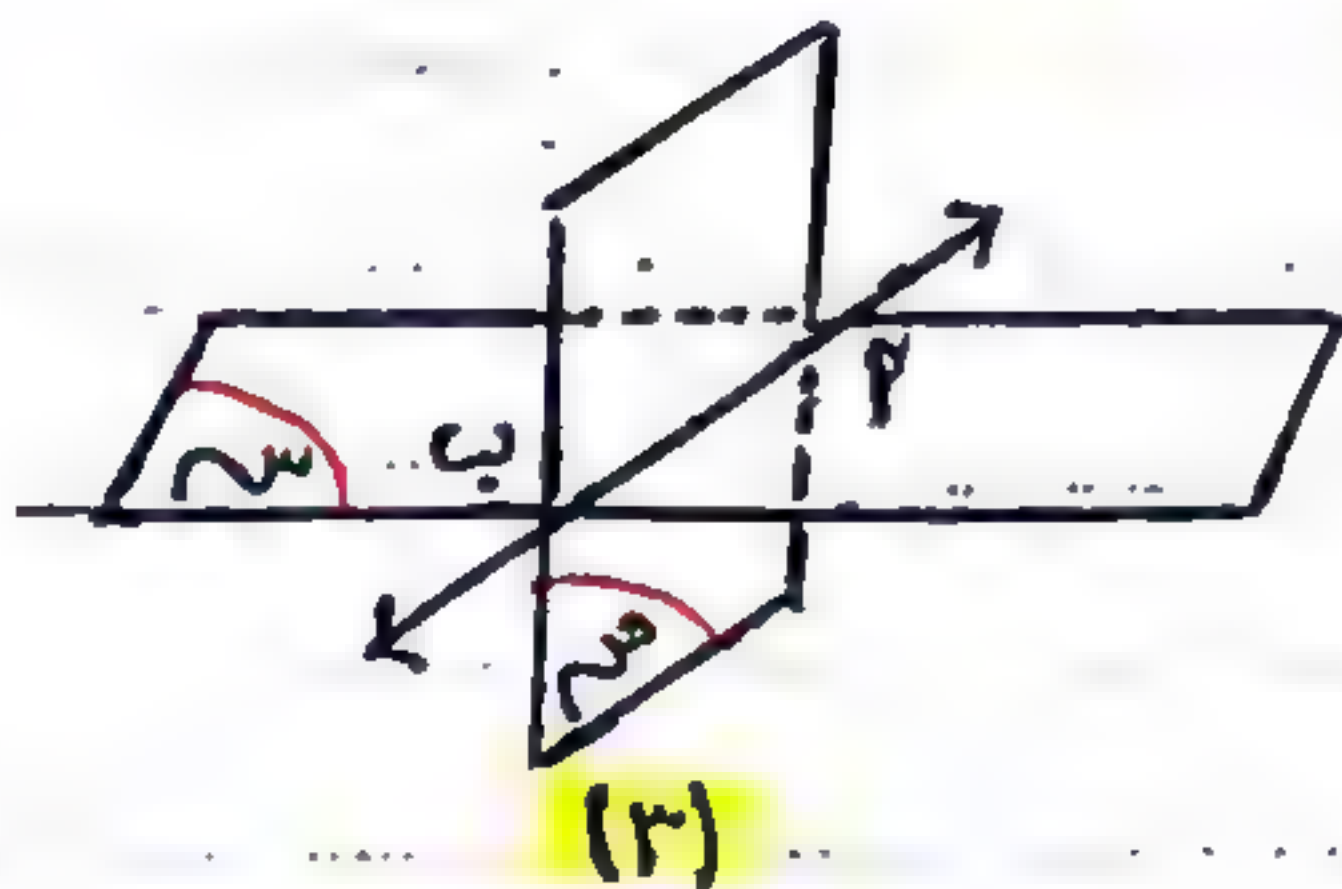
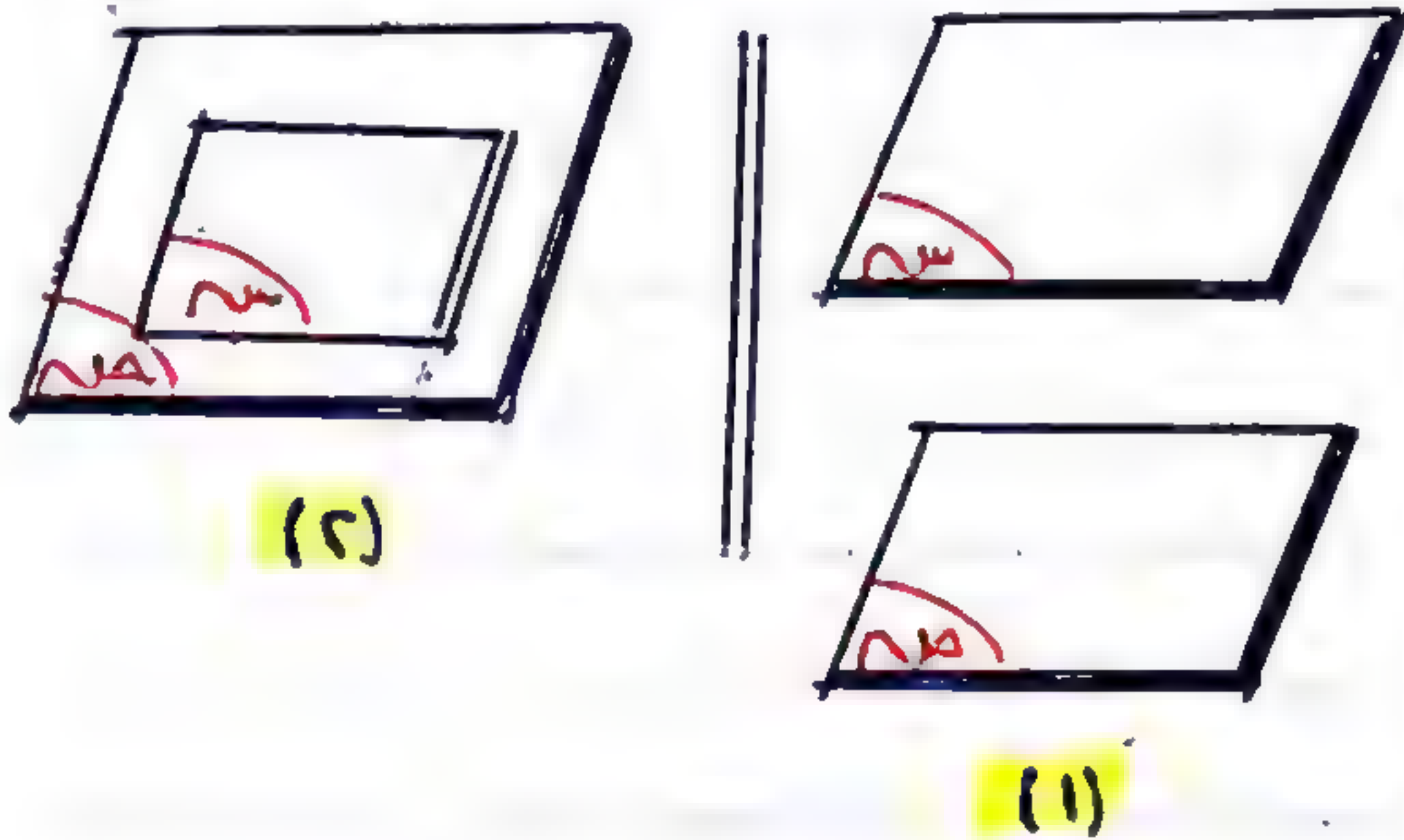
وممكن نقول $S \cap P = S = P$

← الشكل (٢)

المستويان متقاطعان .

$$S \cap P = \{P\}$$

← الشكل (٣)



← الملاقاة بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

المستقيم يوازي المستوي .

$$S \cap P = \emptyset$$

$$\therefore P \parallel S$$

← الشكل (١)

المستقيم يقطع المستوي في نقطة .

$$S \cap P = \{P\}$$

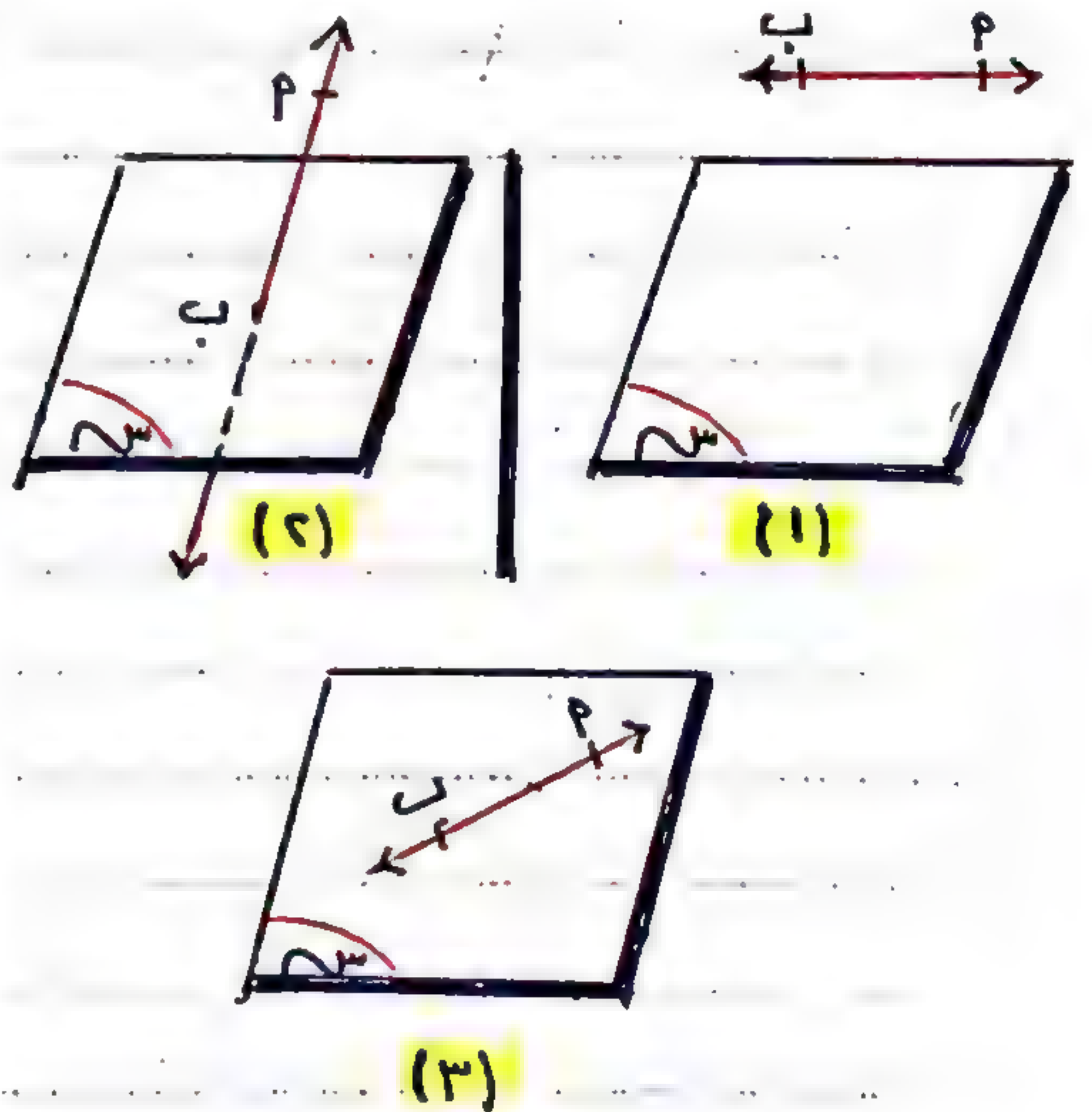
← الشكل (٢)

المستقيم يقع بالكامل داخل المستوي .

$$S \cap P = P$$

$$P \subset S$$

← الشكل (٣)

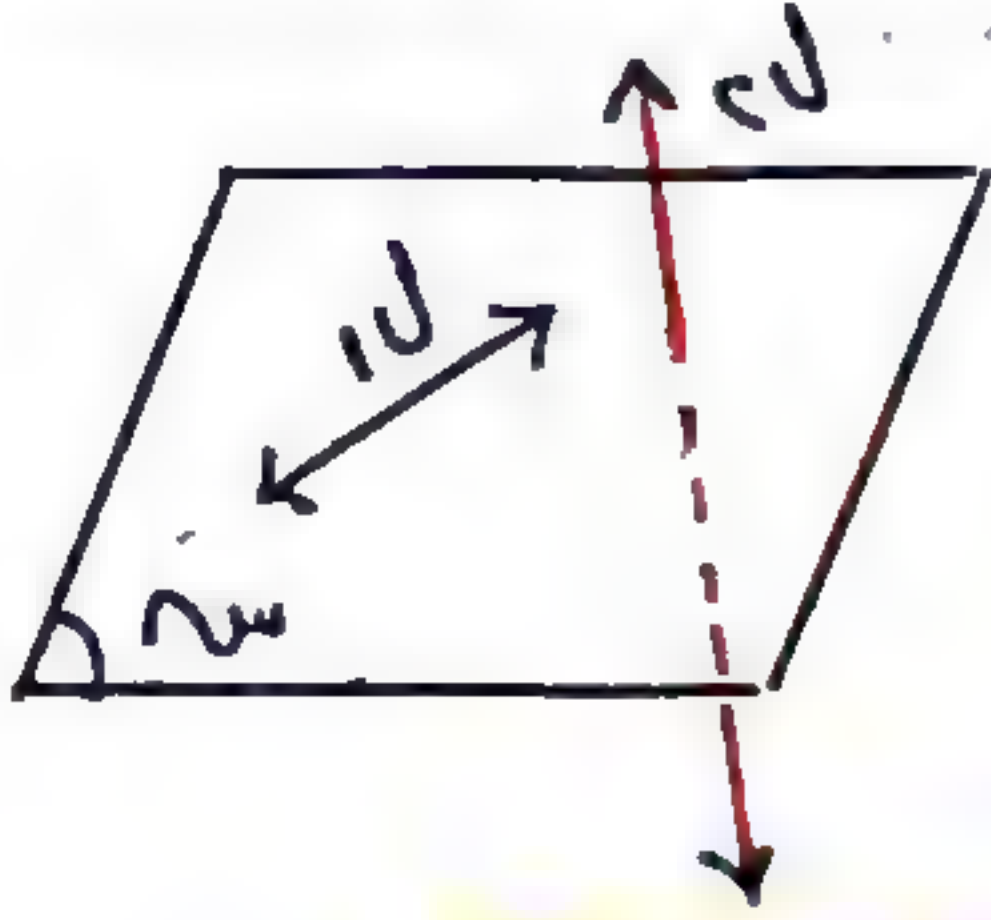


- المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ يكونان متوازيان.

- أي نقطتين في الفراغ يمر بهما مستقيم واحد وعدد لا نهائي من المستويات.

- المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولا يجمعهما مستوي واحد.

- أي مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات.



لاحظ يا معلم:

ل \cap ل = متخالفان وذلك لأنه:

$$\phi = \text{ل} \cap \text{ل}$$

- لا يجمعهما مستوي واحد.

- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوي وحيد.

- إذا اشتركت مستقيمان ومستويان في أكثر من نقطة فإن المستقيمين يقعان بأكمله داخل المستوي.

- أقل عدد من المستويات يحدد سطح مجسم يساوي 2 (الهرم الثلاثي).

سؤال خطير:

- إذا كان: $\text{ل} \cap \text{ل} = \phi$ وكان:

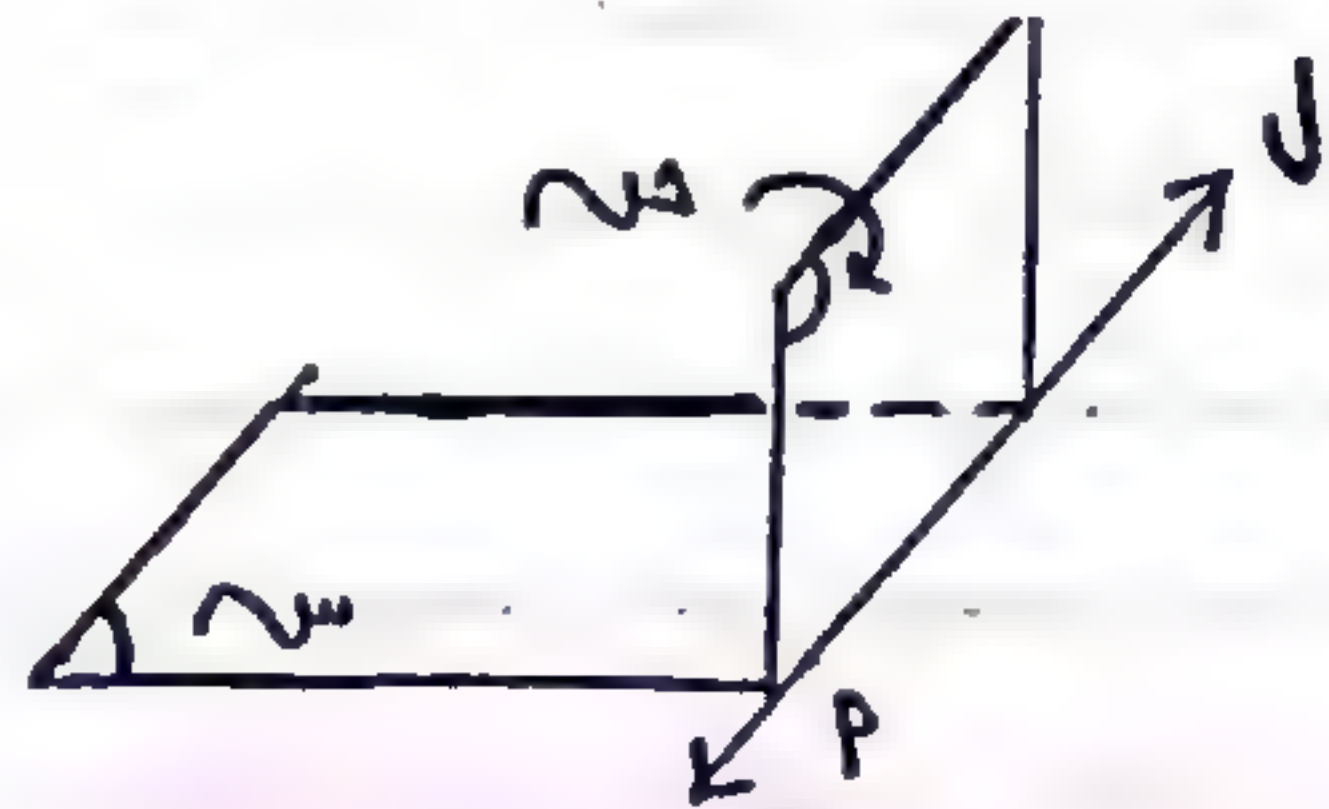
ل يجمعهما مستوي واحد فإن:

$$\text{ل} // \text{ل}$$

ل لا يجمعهما مستوي واحد فإن:

ل \cap ل متخالفان.

- إذا اشتركت مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة.



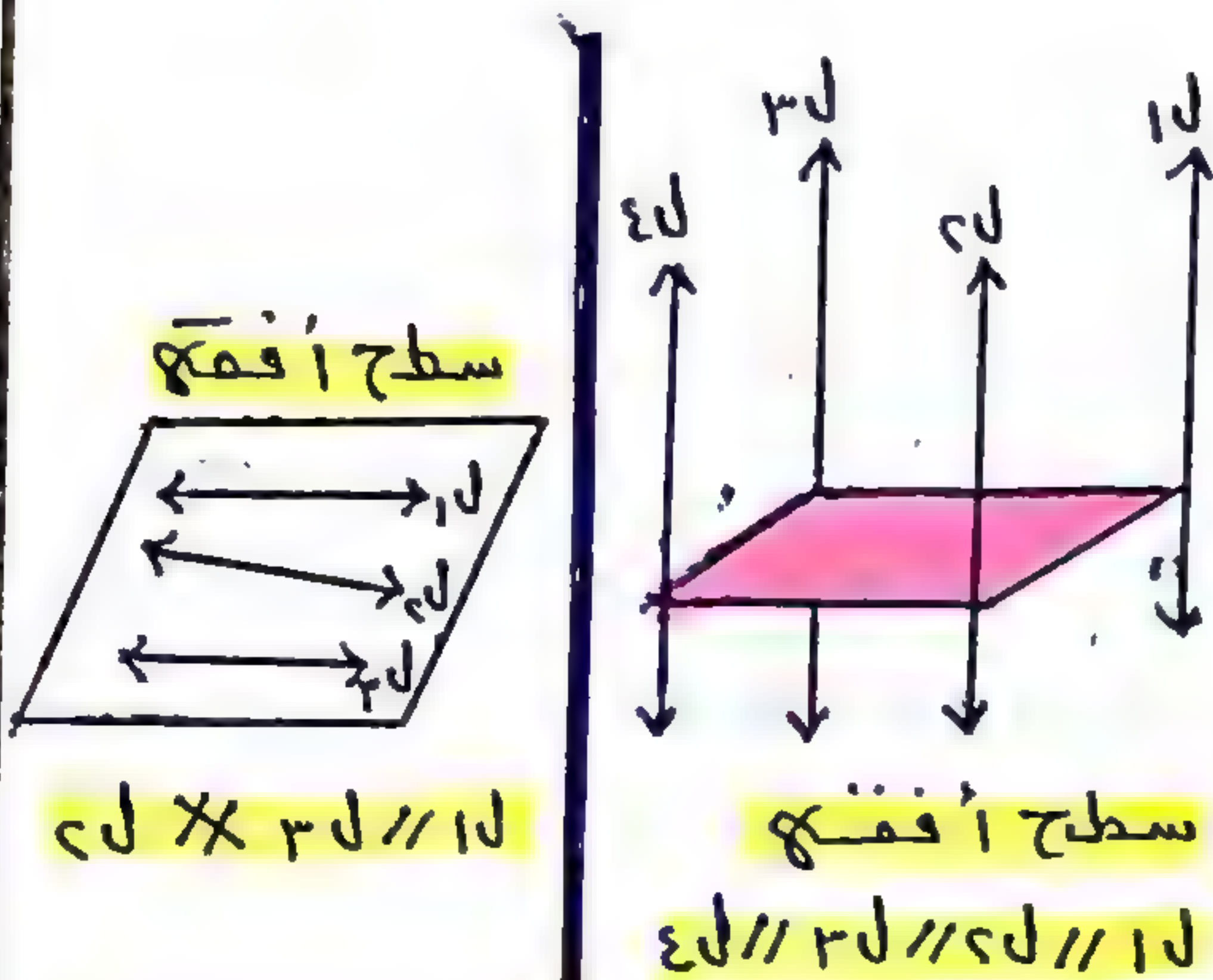
$$\text{س} \cap \text{ل} = \text{ل} \text{ حيث } P \in \text{ل}$$

خطر:

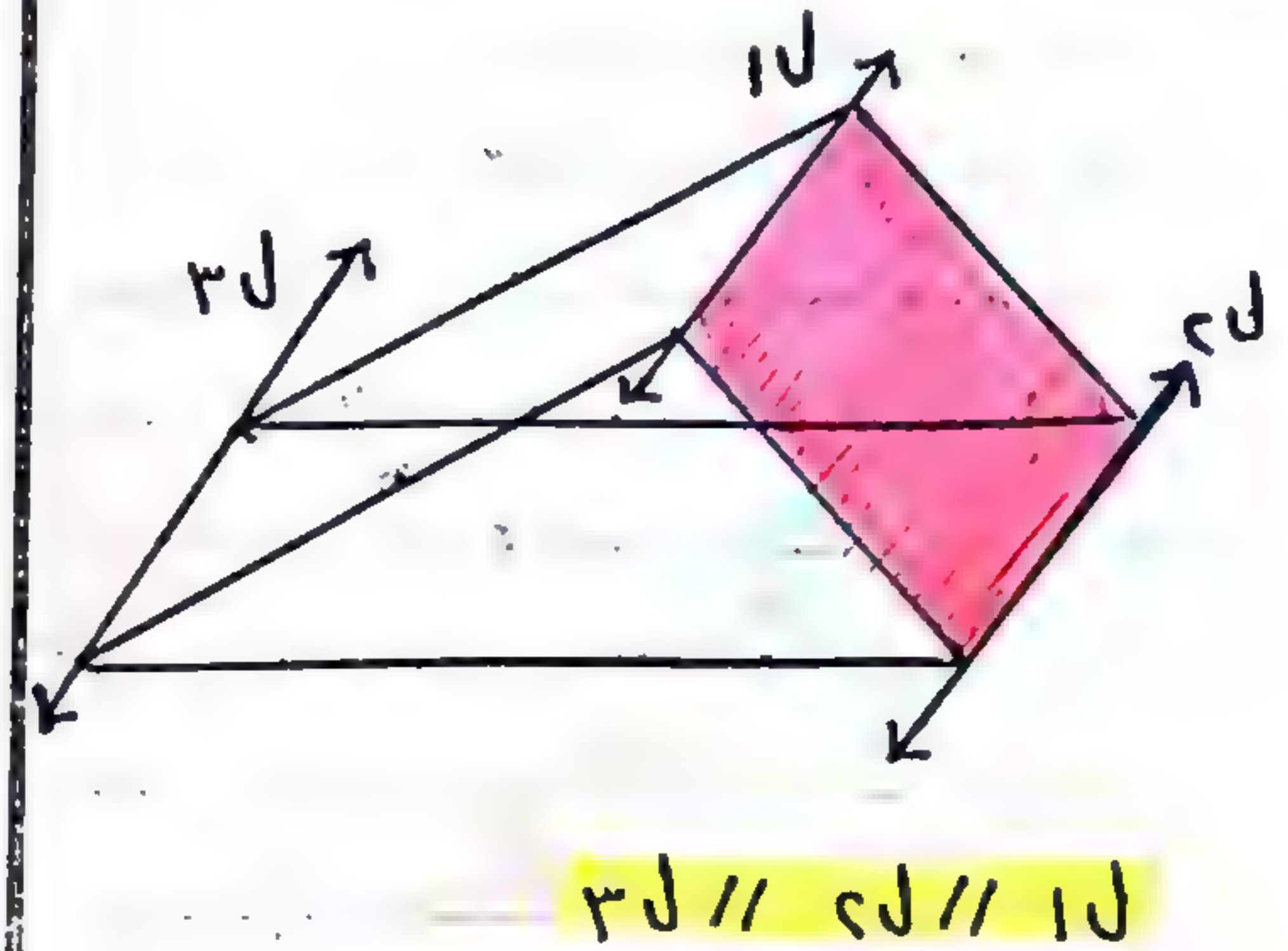
المستقيمان يتقاطعان في نقطة

المستويان يتقاطعان في مستقيم

■ المستقيمت الرأسية كم الفراغ كلها متوازية. ولكن ليس من الضروري أن تكون المستقيمت الأفقية كلها متوازية.



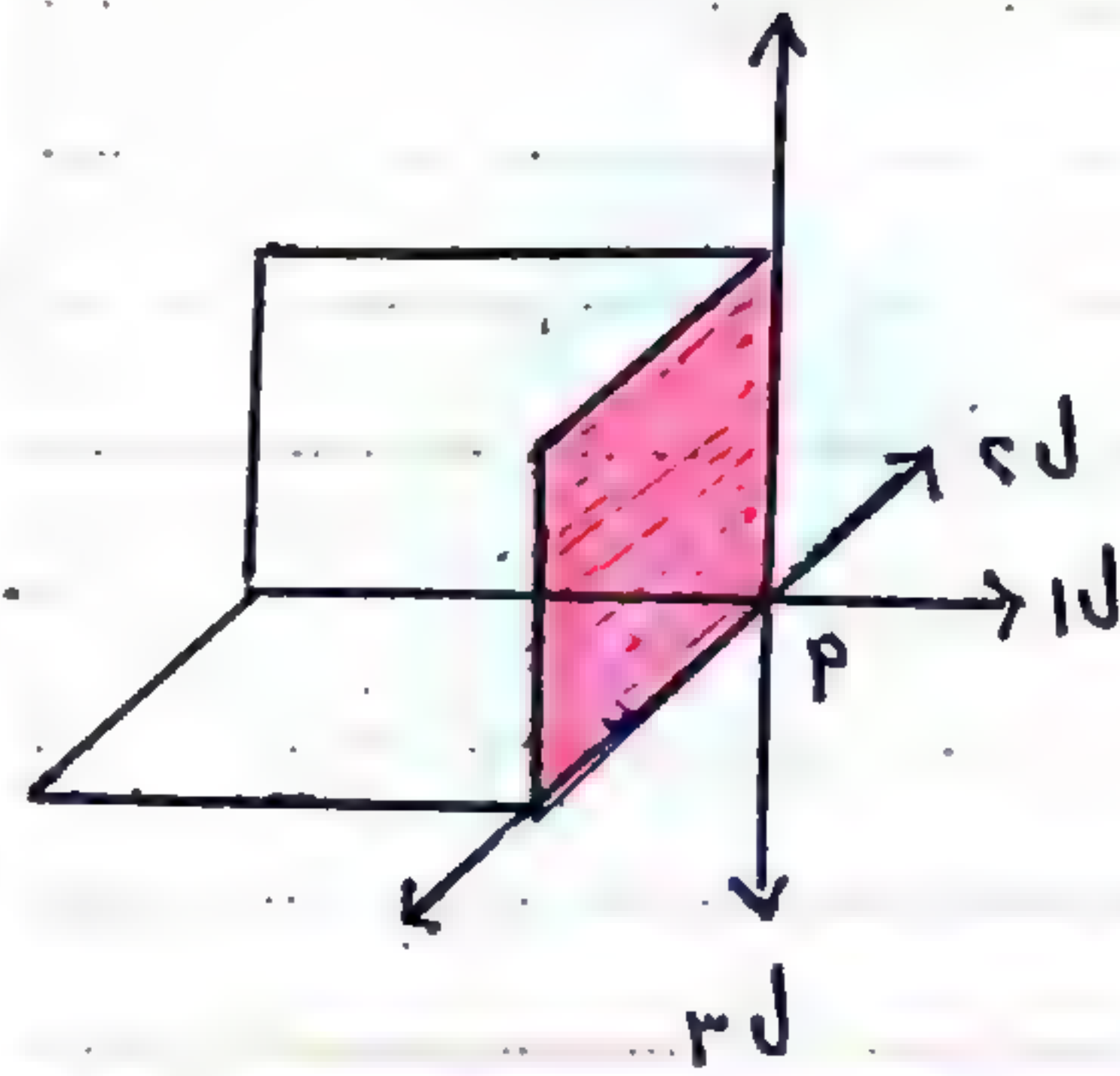
■ إذا تقاطعت ثلاث مستويات متثل متثل فان مستقيمت تقاطعهما، أما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعاً كم نقطة واحدة.



■ إذا اشترك مستويان كم ثل ث تقاطع لست على استقامة واحدة فانهما يكونان مطبقان.

■ إذا اشترك مستويان كم مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه فانهما يكونان مطبقان.

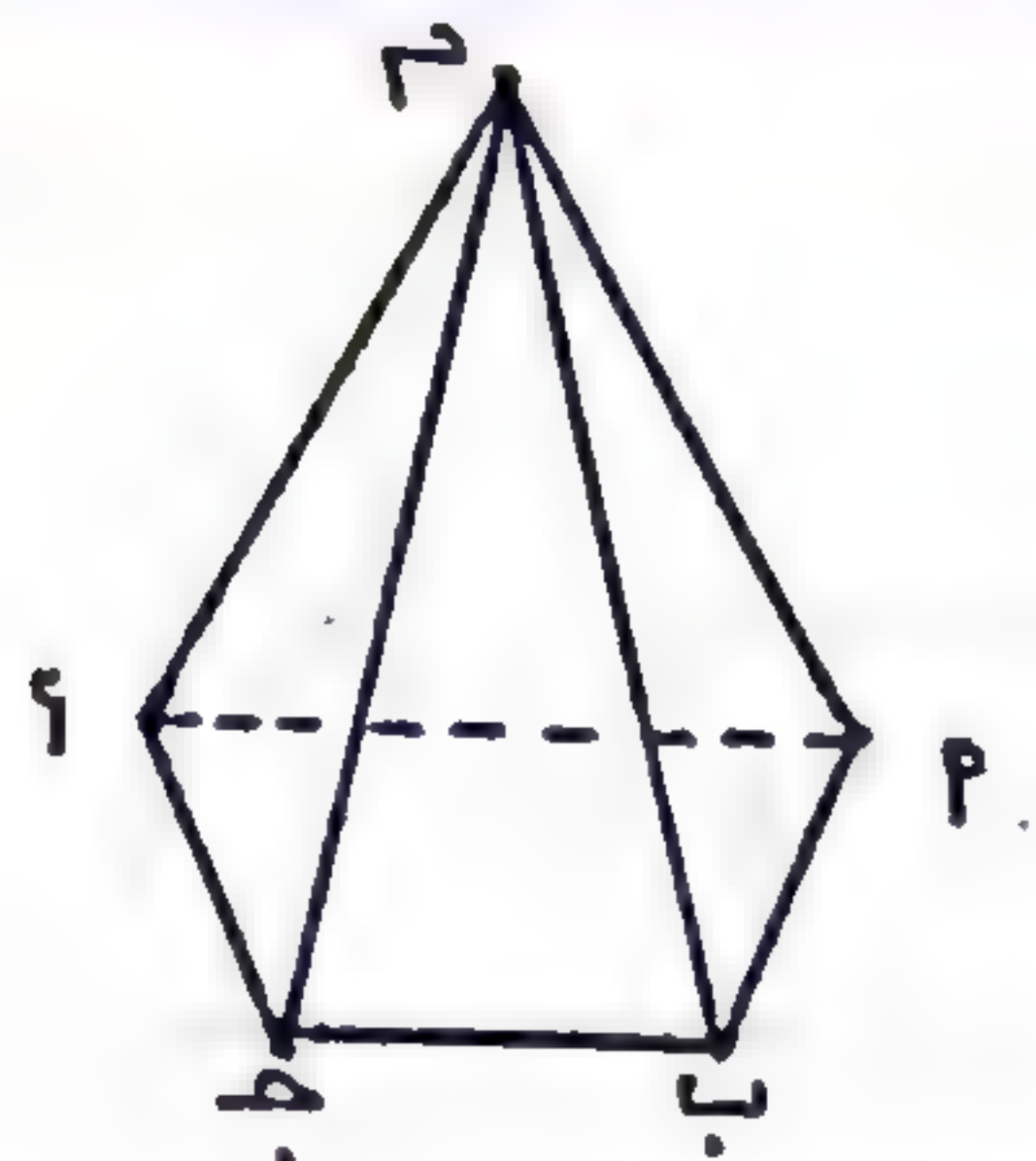
■ إذا اشترك مستويان كم مستقيمت متقاطعت فانهما يكونان مطبقان، وكذلك إذا اشترك كم مستقيمت متوازيان فانهما يكونان مطبقان.



$$\{P\} = 1L \cap 2L \cap 3L$$

■ إذا تقاطعت المستقيمت الحاملان لعظم الشكل الرباعي كم نقطة فان أضلاعه تثل جميعاً كم مستوي واحد.

① أكمل باستخدام الشكل التالي:

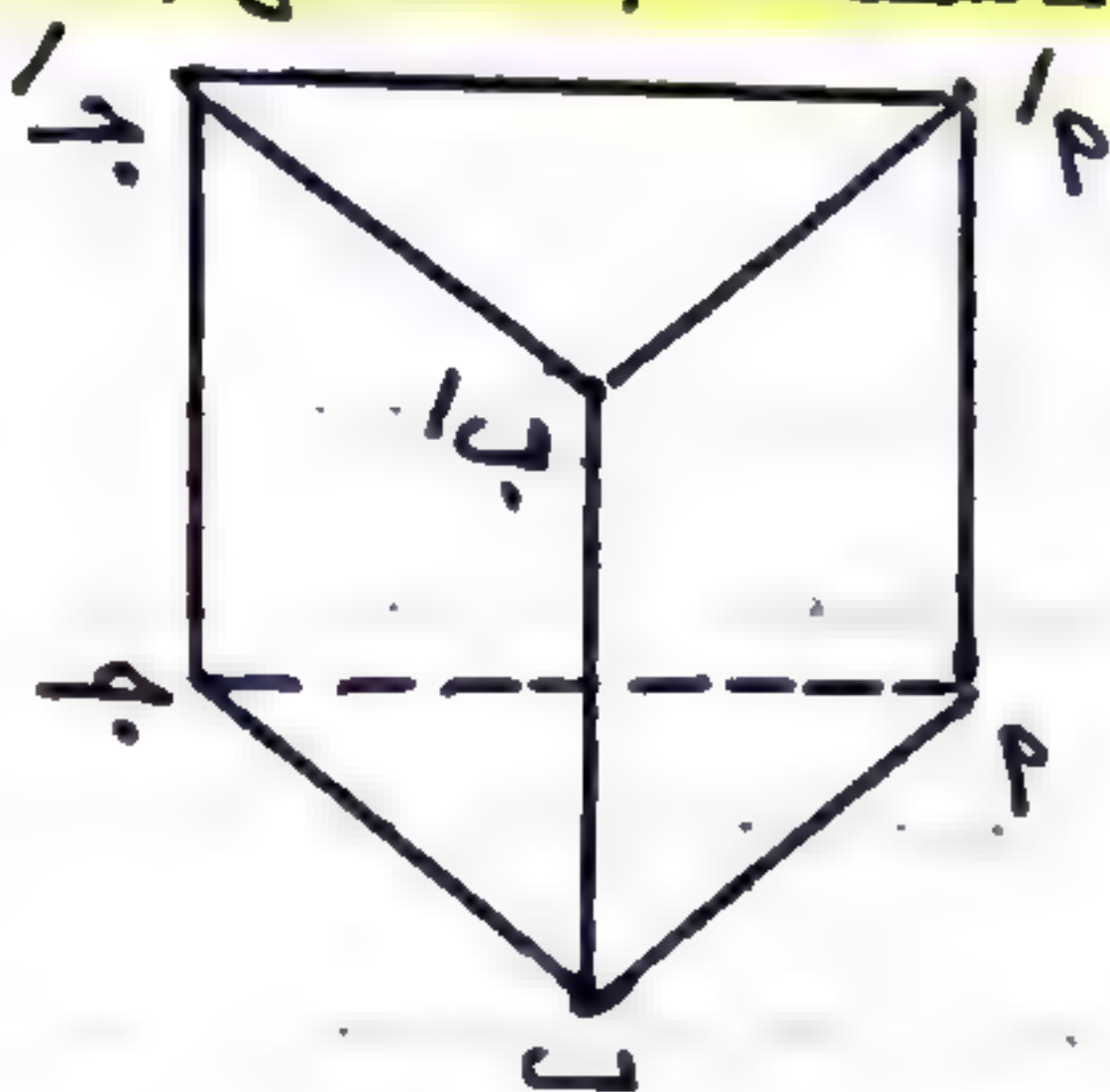


■ عدد المستقيمات التي تحمل
أحرف الشكل

■ المستقيمات التي تحمل الأحرف
وتعبر بالنقطة 'م' هي:

■ عدد المستويات التي تحمل أوجه
الشكل

② أكمل باستخدام الشكل التالي:



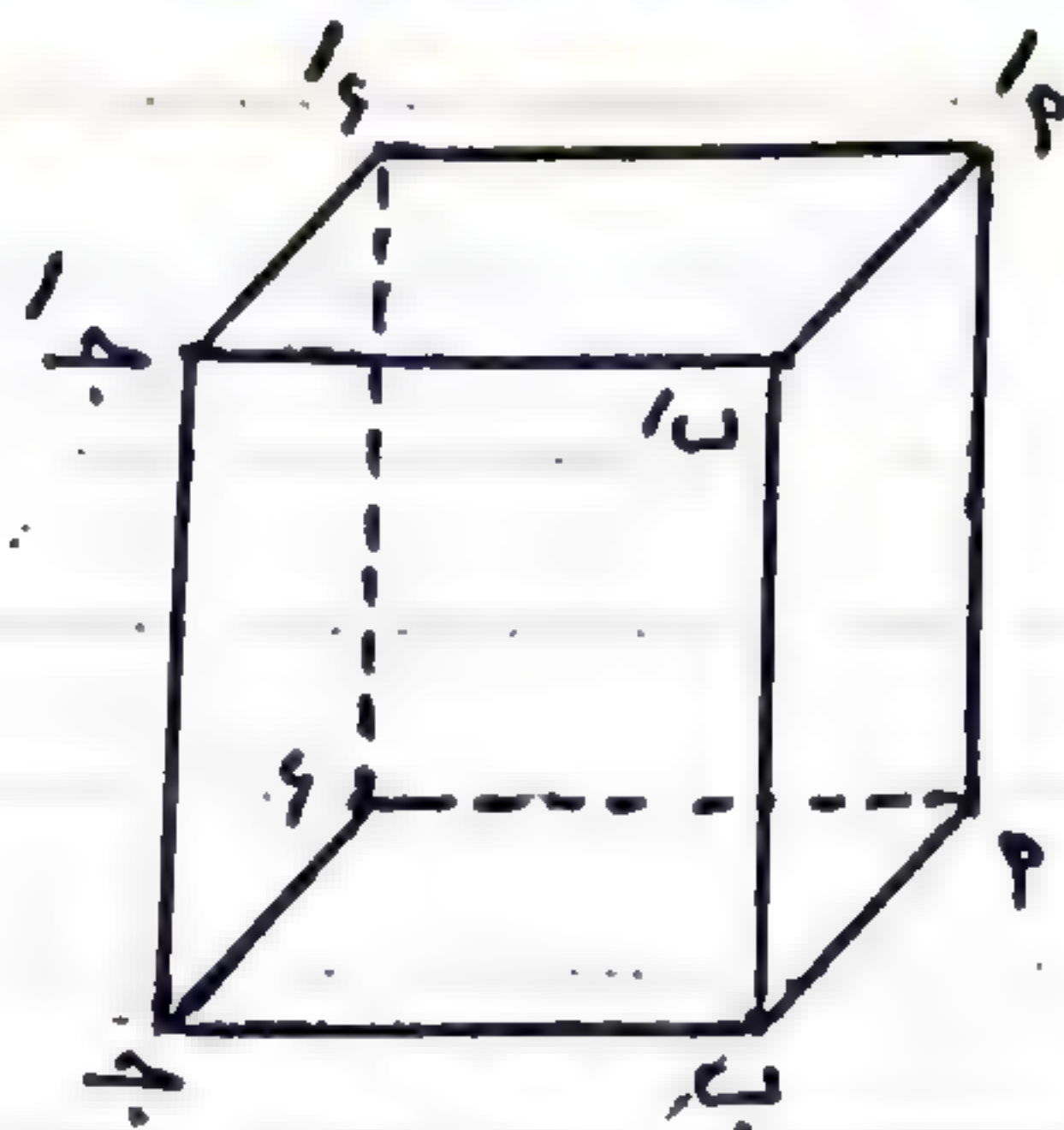
■ المستوى 'م' ب' ل'
يساوي

■ المستوى 'م' ب' ج'
يساوي

■
م' ج' ل'
يساوي

■
ل' ب' ج'
يساوي

المستوى ٤ ج د ' ب ' / المستوى ٨



• اكتب ثلاث مستقيمات يمر بالنقطة P

• اكتب المستقيمات التي تمر بالنقطتين
٢٥ ب مما

۱۰۰ اکتب تکالیف مستویات بم بالقطه ۲

۱ کتب نکلے مستویات بحر یا لمقطنی
۲ کتب سما

المستويان م ب د ك م و ن م متقاطعان
فك [فكرة حلوة جدا]
(يُصن كمل المستوي م ب د ك ليصبح م ب د و
ويجيب استغل على م ب د و ن م و ن م

⑤ اختر الاجابة الصحيحة!

جميع الحالات الآتية هي من مستوى

..... 1226

(٢) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه

(ب) مستقیمان متواز باشند

(م) مستقیمان متقاطعات

(۹) مستقیمان متخلفات .

عدد المستويات التي يمر بنقطة معلومة

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) لانها

عدد المستفيحات اللازم بنقطة معلومة

(٢) مفرد (ب) ١ (ح) ٢ (٩) لائيفائٹ

■ ان كان المستقيم l // المستوي α من

$\dots = \text{فأولاً} : \text{لأنه}$

د (ب) ... د (پ)

(b) 2 (c) 3

■ المستقيمان المتخالفان

(أ) يقمان في نفس المستوى

(ب) تقاطعا

(ج) يقمان في مستويين مختلفين

(د) متوازيان

■ إذا كان المستقيم l ح المستوى π س

..... $\pi \ni P$ فإن $l \cap \pi = P$

(أ) \emptyset (ب) l

(ج) π (د) $\{P\}$

■ المستقيمت الرأسية في الفراغ

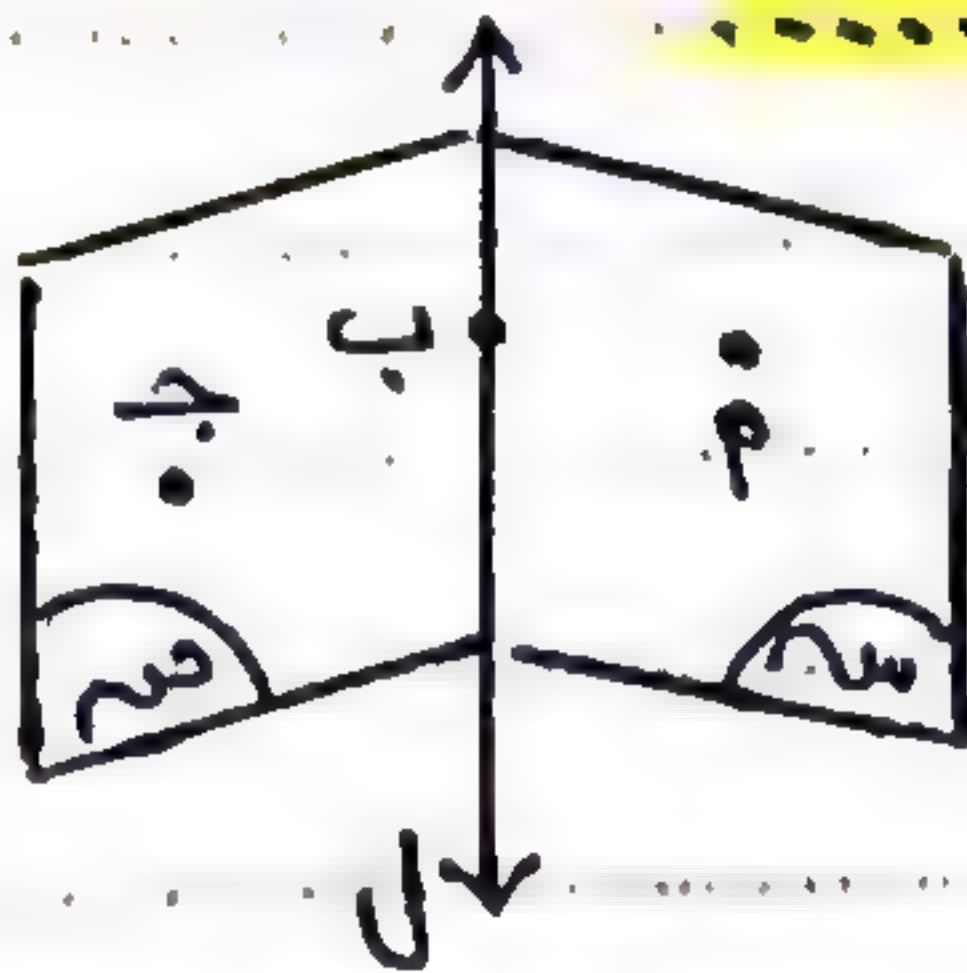
تكون

(أ) متوازية (ب) متخالفة

(ج) جميعها مستواحدة (د) متقاطعة

■ المستوى π س \cap المستوى π' س

يساوي



(أ) $\{P\}$ (ب) \emptyset

(ج) المستقيم l (د) $\{P, l\}$

■ أقل عدد من المستويات التي يمكن

أن يحدد سطح مجسم هو

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤

■ إذا كانت P و B و C ثلاث نقاط

يتمين 'مستوى' فإن

(أ) $P = B = C$

(ب) $P = B + C$

(ج) $P < B + C$

(د) $P > B + C$

■ إذا كان المستقيمان l و l' متخالفان

فإن $l \cap l' = \emptyset$

(أ) \emptyset (ب) l

(ج) l' (د) المستوى الذي يضمهما

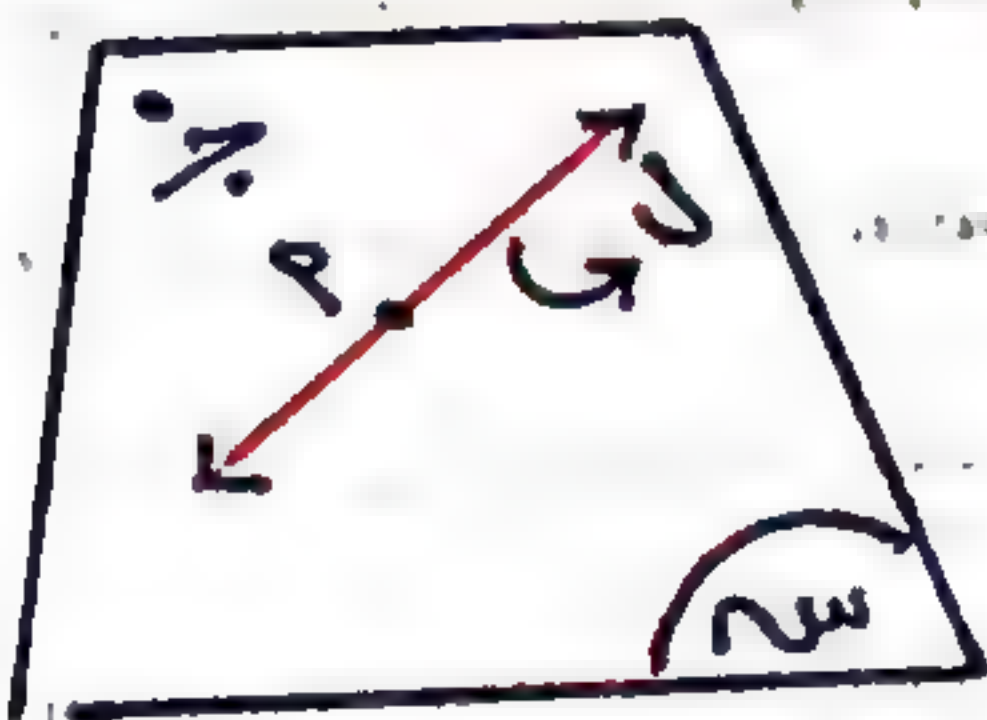
■ أخرج الجمل الآتية عن صححة:

(أ) $l \subset \pi$ س

(ب) $P \in l \subset \pi$ س

(ج) $B \in \pi$ و $C \notin \pi$ س

(د) $P \in l \subset \pi$ س



■ إذا كانت S ، M ، E مستويات
فـ الفراغ بحيث : $S \cap M \cap E = \emptyset$
، $S \cap M = \emptyset$ = المستقيم l ، $l \in A$ الجمل
الآتية غير صحيح ؟

(٢) $P \ni l$ (١) $l \cap M = \emptyset$ $[P] = \emptyset$
(٣) $l \cap M = \emptyset$ (٢) $P \ni l$

■ يطبق المستويان إذا اشتركا
(٢) نقطة واحدة (١) نقطتان
(٣) ثلاث نقاط على استقامة واحدة
(٤) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

■ A الجمل الآتية غير صحيحة : حيث
 l ، l مستقيمان، S ، M مستويان

(٢) إذا كان : $l \cap M = \emptyset$ ، $P \ni l$ فان
 $l \cap M = \emptyset$ أو $l \cap M = \emptyset$ متخالفان .
(١) إذا كان : $l \cap M = \emptyset$ ، $P \ni l$ فان $l \cap M = \emptyset$
(٣) إذا كان : $l \cap M = \emptyset$ ، $P \ni l$ فان $l \cap M = \emptyset$
(٤) إذا كان : $l \cap M = \emptyset$ ، $P \ni l$ فان $l \cap M = \emptyset$

■ إذا اشترك المستقيم والمستوي فـ
تقطع فإن المستقيم
(٢) $l \cap M = \emptyset$ المستوي

(١) يقطع المستوي فـ نقطة واحدة
(٣) يقع بالكامل داخل المستوي .
(٤) يقطع المستوي فـ تقطعت فـ

■ المستويان غير المتوازيان يتقاطعا
فـ

(٢) نقطة (١) خط مستقيم
(٣) مستوي (٤) سماع

■ A الجمل الآتية غير صحيحة :
(٢) A مستقيمين مختلفين ومتوازيين
يفيئان مستويًا .

(١) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين
يشتركان فـ نقطة واحدة .
(٣) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما
مستوي واحد

(٤) A ثلاث نقاط ليست على استقامة
واحدة يمر بها مستوي واحد على الأقل .

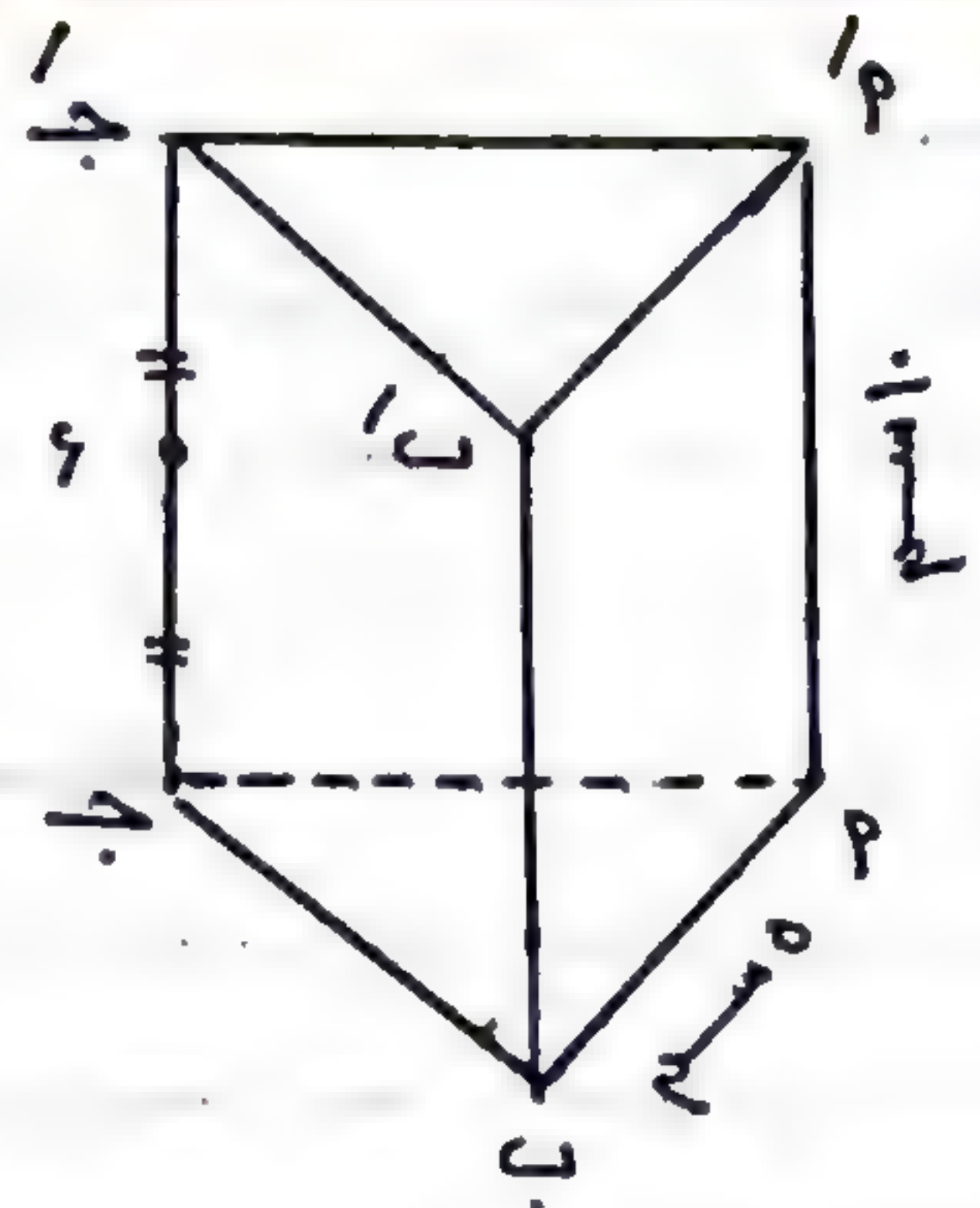
■ إذا كانت M نقطة لا تنتمي للمستوي
الذي يحتم النقطة P ، B ، C فان
المستقيم MP
(٢) يقع بالكامل داخل المستوي

(١) يقطع المستوي فـ نقطة
(٣) يقطع المستوي فـ تقطعت
(٤) يوازي المستوي .

٦ - (د ب و ج) =
الحل

٦) في الشكل التالي :
د ب ب' م' ك ب ب' ح' ج' م' ج' م'
ثلاث مستطيلات متقاطعة متساوية
متساوية ومتطابقة ، متناصف ح' ج'
فأذا كان :

د ب = م م' ، م م' = م م' = م م'



أكمل :

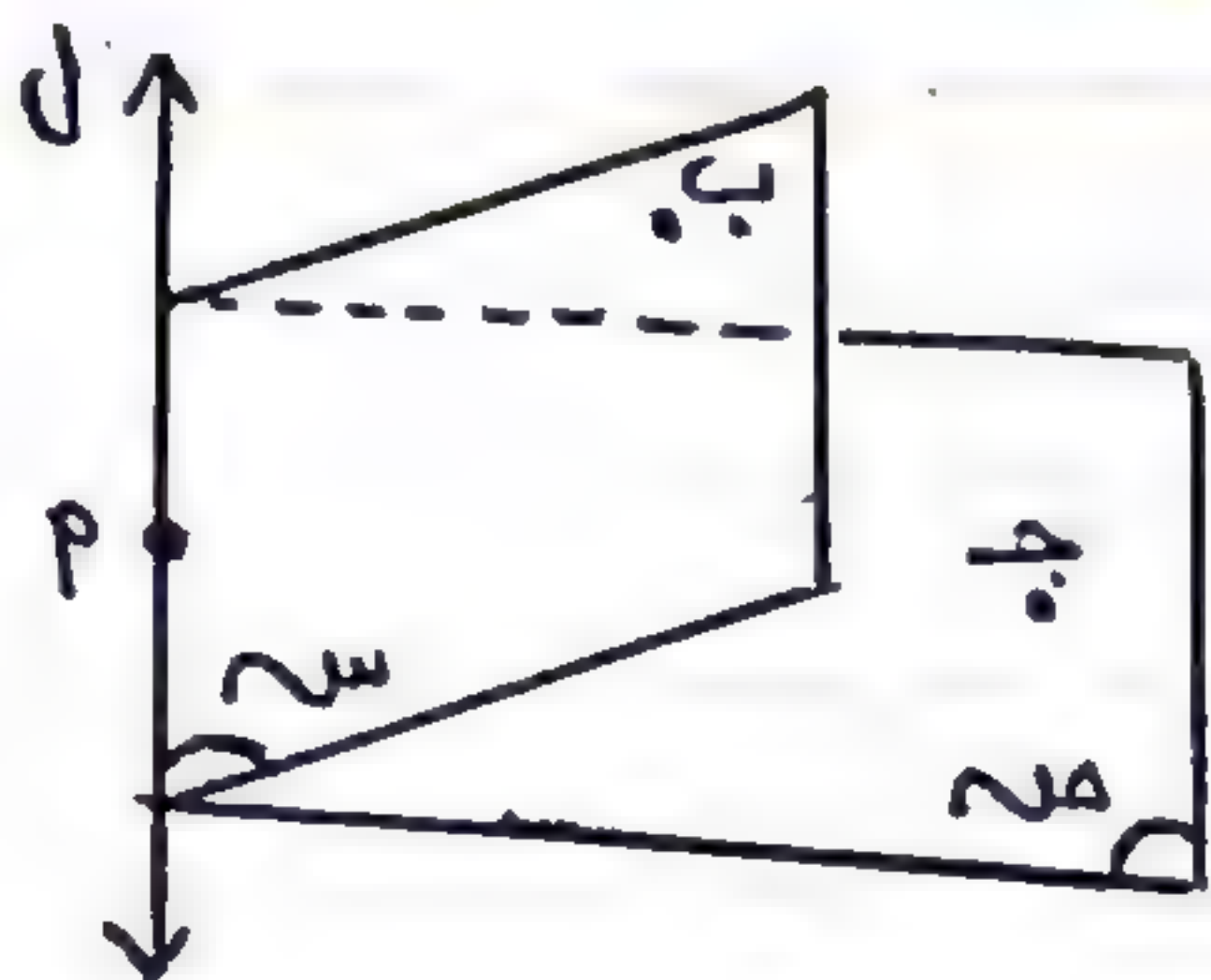
المستوى م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

المستوي م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

المستوي م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

٧) في الشكل التالي :

س م مستويان متقاطعان في المستقيم
ل م م' ل ب م' م' م' م' م' م'
ج م م' ج م' م' م' م' م' م'

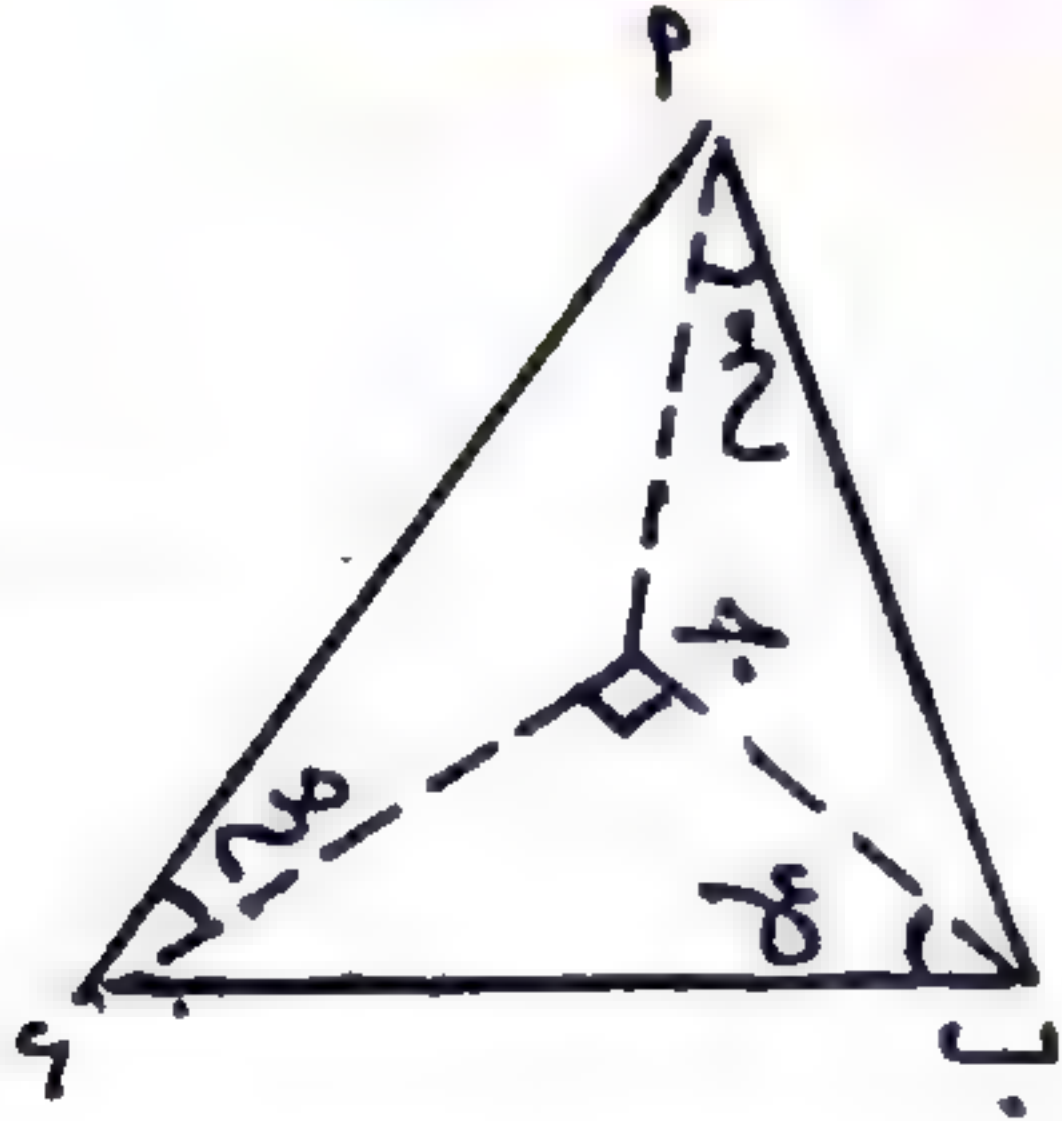


المستوي م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

المستوي م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

المستوي م م' م' م' المستوي د ب ب' ب'
يساوي

٩) فكم الشكل الموضح: P المستوي
ب ج هـ أكمل يا معلم:



$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

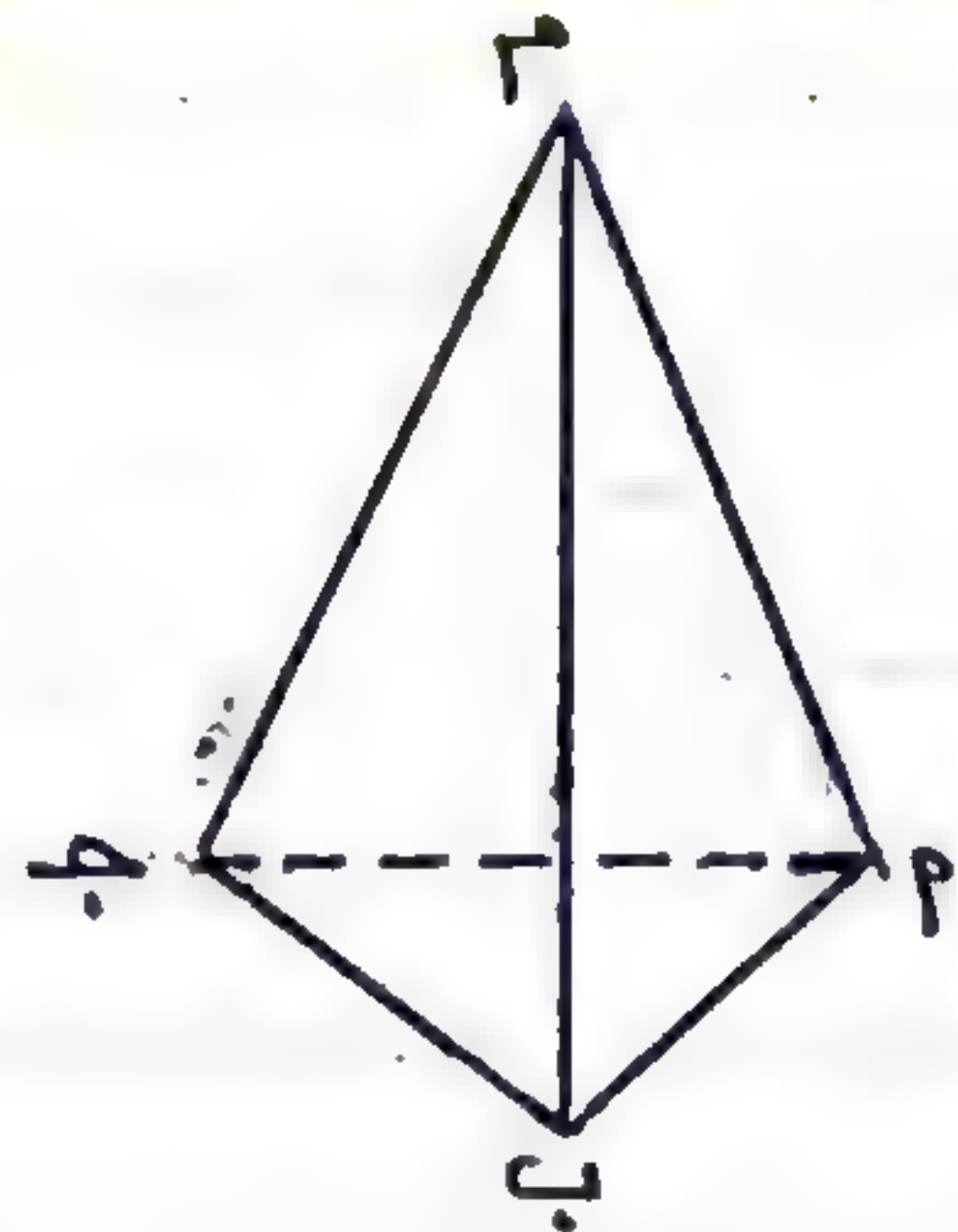
$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

الحل

٨) تأمل الشكل التالي ثم أكمل:



$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

$$P \perp BH = \dots\dots\dots$$

• نقطة واحدة معلومة

■ نَقَطِیْنِ : مَخْتَلَفَتَیْنِ

• ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

• تَلَاَتُ نَفَاتٍ لَمَسَتْ عَلَى اسْتِغَامَةٍ وَاحِدَةٍ.

$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ \downarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \rightarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$

(ب) عَيْنُ الْأَوْصَالِ السَّيِّئَةِ لِلزَّوْجِ مِنْ

المستويات الثلاثة !

• ۱۵۰۰' ۱۲' ۶' ۶' ۱۰' ۱۰'

$$s_{\alpha} u' p \in p u' u' p =$$

9.1.19 62.48

③ انا علمت اني :

$\overline{P} \quad \longleftrightarrow \quad P$ $\overline{Q} \quad \longleftrightarrow \quad Q$

۱۲) اکمل یا پر سن:

⑤ اذنا كان المستقيم ل. ن. المستوي من
يساوي {٢} فان ل للمستوي من

(ب) اذا كان المستقيم l \perp المستوى α \sim

سواء ۶۶۳ ب { فان ل

۱۳) سه کلمه که علامت‌های مستویات حین

$$J = \omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \{P\} = \gamma \wedge \omega \wedge \omega$$

حيث ل يمثل مَسْمُومٌ فَأُخِ ... الاحتمالات الآتية
عَنْ مَسْتَح :

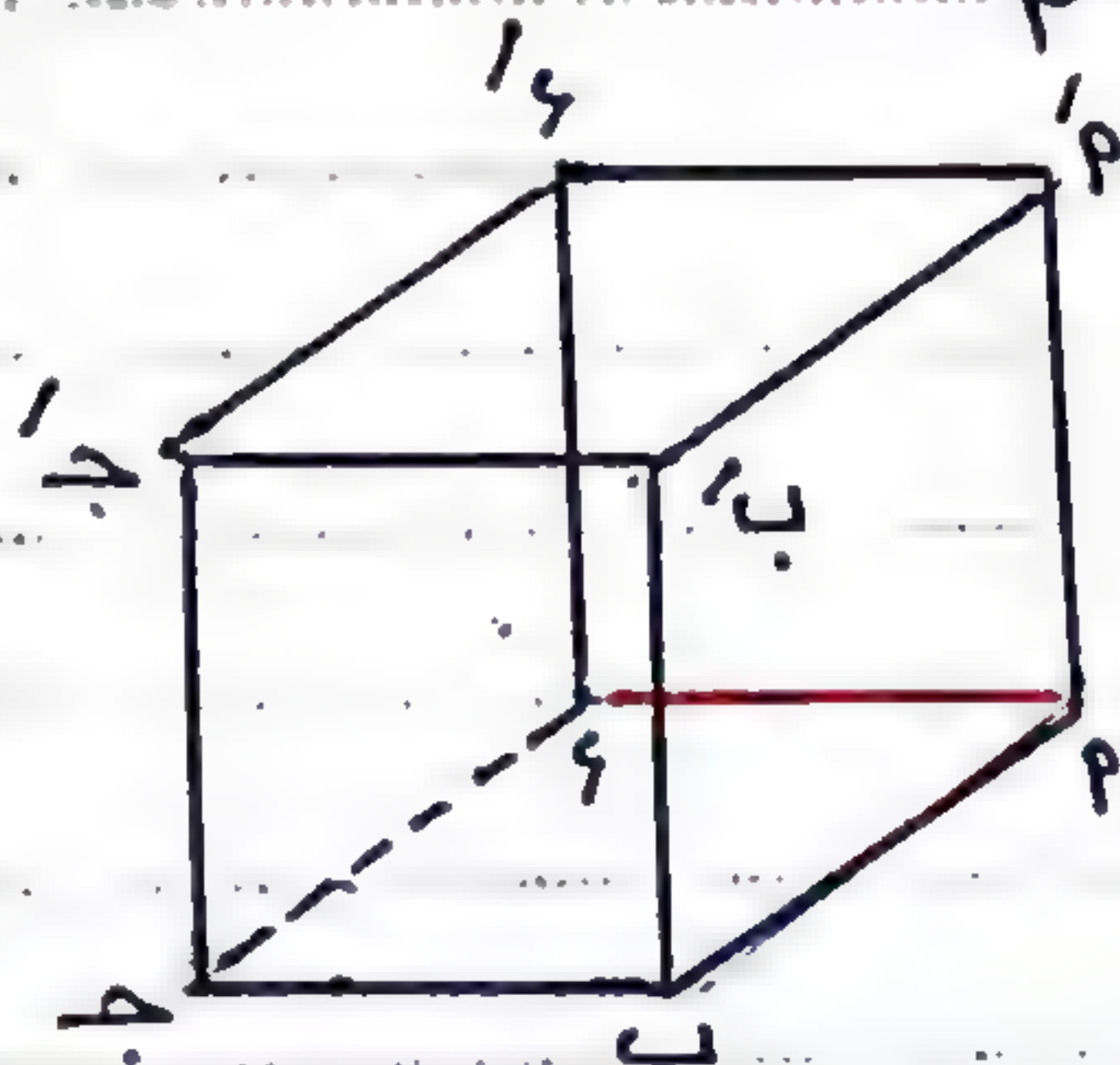
$$\{P\} = \{J\} \cap J \quad \dots \quad J \ni P.$$

83P 811J

⑪ في السجل التالي:

۲۲ ب ح و ۲۳ پ ا ب ح و ۲۴ مکب ط و

حرفه ... ۶سم



⑤ عَنِ الْأَوْفَالِ السَّبِيَةِ لِكُلِّ رُوحٍ مِنْ

المسحوقات الآتية:

$\begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ 199 \end{matrix}$

[٦] ■

⑤ بالترتيب كما يلي :

(٦) ■

■ عدد لانها ٦ (٦)

(١١) ■

(١٢) ■

(١٣) ■

(١٤) متوازية ■

(١٥) ■

(١٦) لأن مجموع أصغر ضلعين لا يمكن أن يكون

أكبر من الثالث وبأسطر المتكافئة .

(١٧) بقمان في كل مستويين مختلفات ■

(١٨) المستقيم ل ■

(١٩) ■

(٢٠) ■

(٢١) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ■

(٢٢) إذا كانت لـ د منه فإن لـ د منه ■

(٢٣) خط مستقيم ■

(٢٤) بمقطع المستويين في نقطة ■

(٢٥) لـ د // ع ■

(٢٦) بمقطعين في كل مستويين ■

(٢٧) إذا ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ■

واحدة يمر بها مستوي واحد على الأقل . ■

* الإجابات *

① = ٨ أحرف

■ عدد = ٣ و هـ :

■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$

■ ٥ مستويات [٤ جواب + قاعدة]

② = د ■

■ د ■

■ د ■

■ د ■

■ د ■

■ د ■

و متساوي القطعة (د، أ) (د، ب)

المستقيم (د، أ) (د، ب)

③ = $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ■

■ {ب} ■

④ = $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■■ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \parallel \vec{EF}$ ■

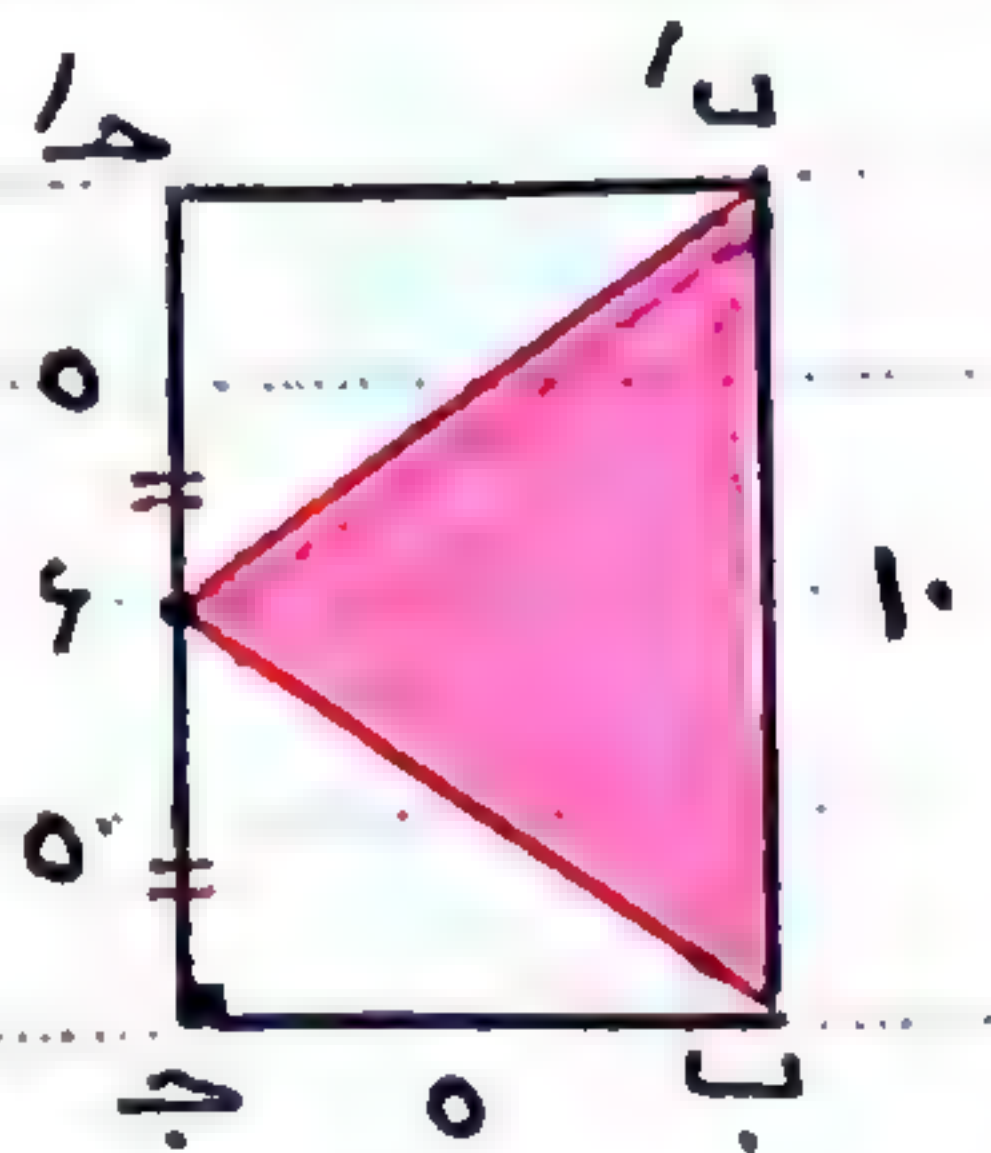
⑦ \overleftrightarrow{AB} ■

الفكرة: هات تقاطع المستويات
الحاويات لكل من P و P' هو
 $P \cap P' = \overleftrightarrow{AB}$ و $P \cap P' = \overleftrightarrow{A'B'}$
هو \overleftrightarrow{AB} ■

∴ المستوي P و P' المستويين \overleftrightarrow{AB} و $\overleftrightarrow{A'B'}$
يساو \overleftrightarrow{AB} ■ #

\overleftrightarrow{AB} ■

$\overleftrightarrow{A'B'}$ ■



من فيثاغورث

$$\sqrt{10} = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{10} \text{ بالمثل}$$

$$5 = \sqrt{10} \text{ فيه}$$

$$10 = 5 + 5 = \sqrt{10} + \sqrt{10}$$

$$10 = \sqrt{10} + \sqrt{10}$$

$$\sqrt{10} + \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$$\# 90 = (\sqrt{10} + \sqrt{10})$$

⑦ \overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

⑧ \overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

⑨ \overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

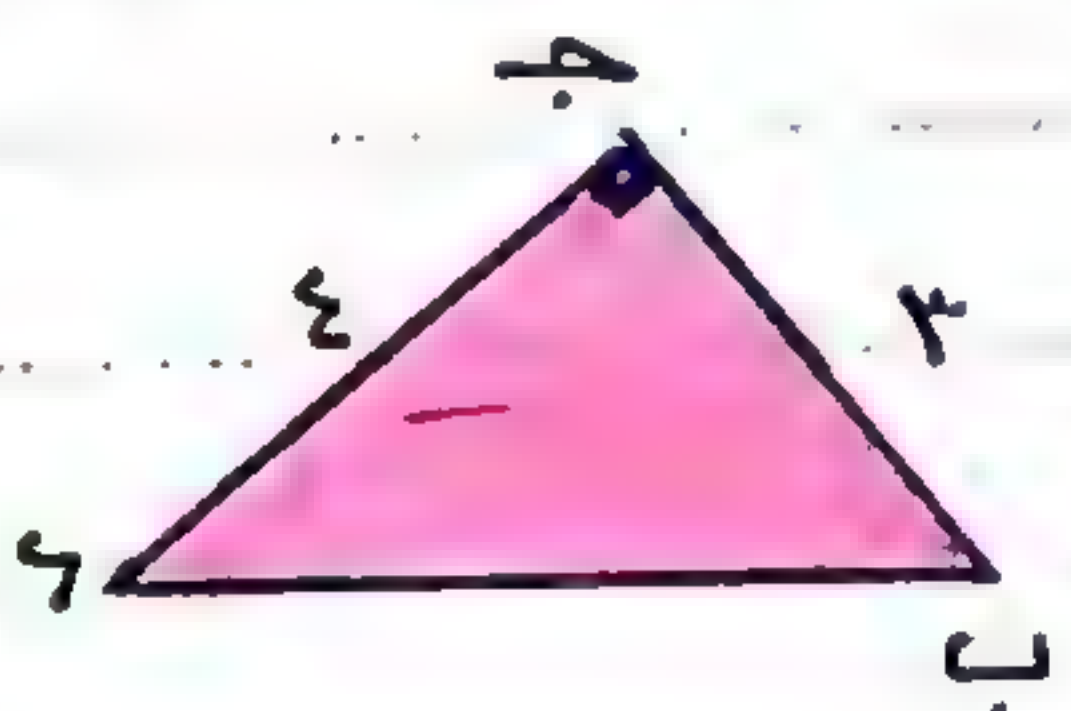
\overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

\overleftrightarrow{AB} ■

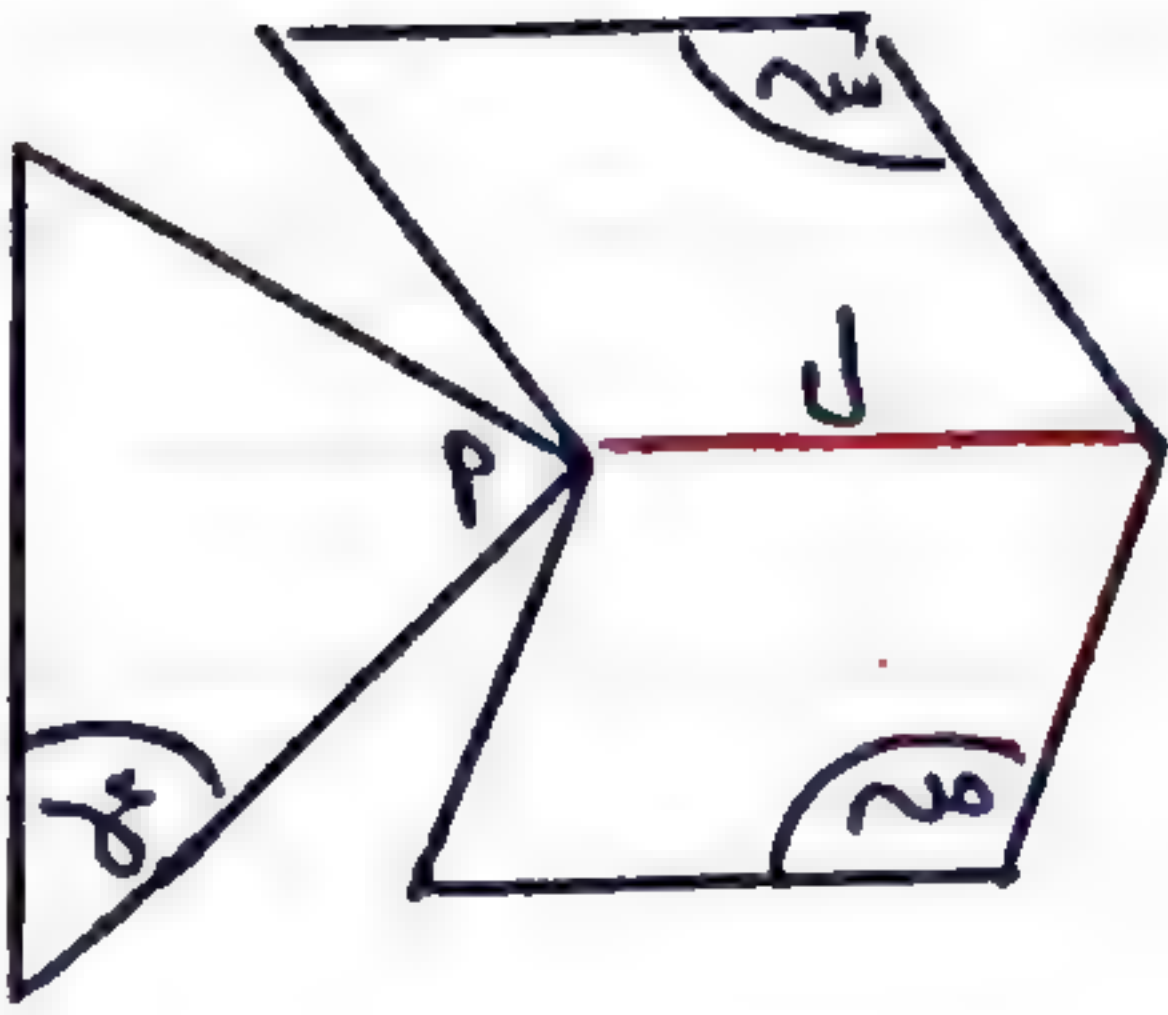
من فيثاغورث

من فيثاغورث



$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

- ١٢) (أ) قاطع
(ب) يفتح بأكملة داخل المستوى س



- ١٣) (أ) ل // ع
ل // ع

- ١٠) عدد لانهائة
عدد لانهائة
عدد لانهائة
مستوى وحيد

- ١١) (أ) متخالفات
متوازيان
متخالفان
متوازيان
متخالفان
متقاطعان

- (ب) متوازيان
متقاطعان من الحروف
متقاطعان

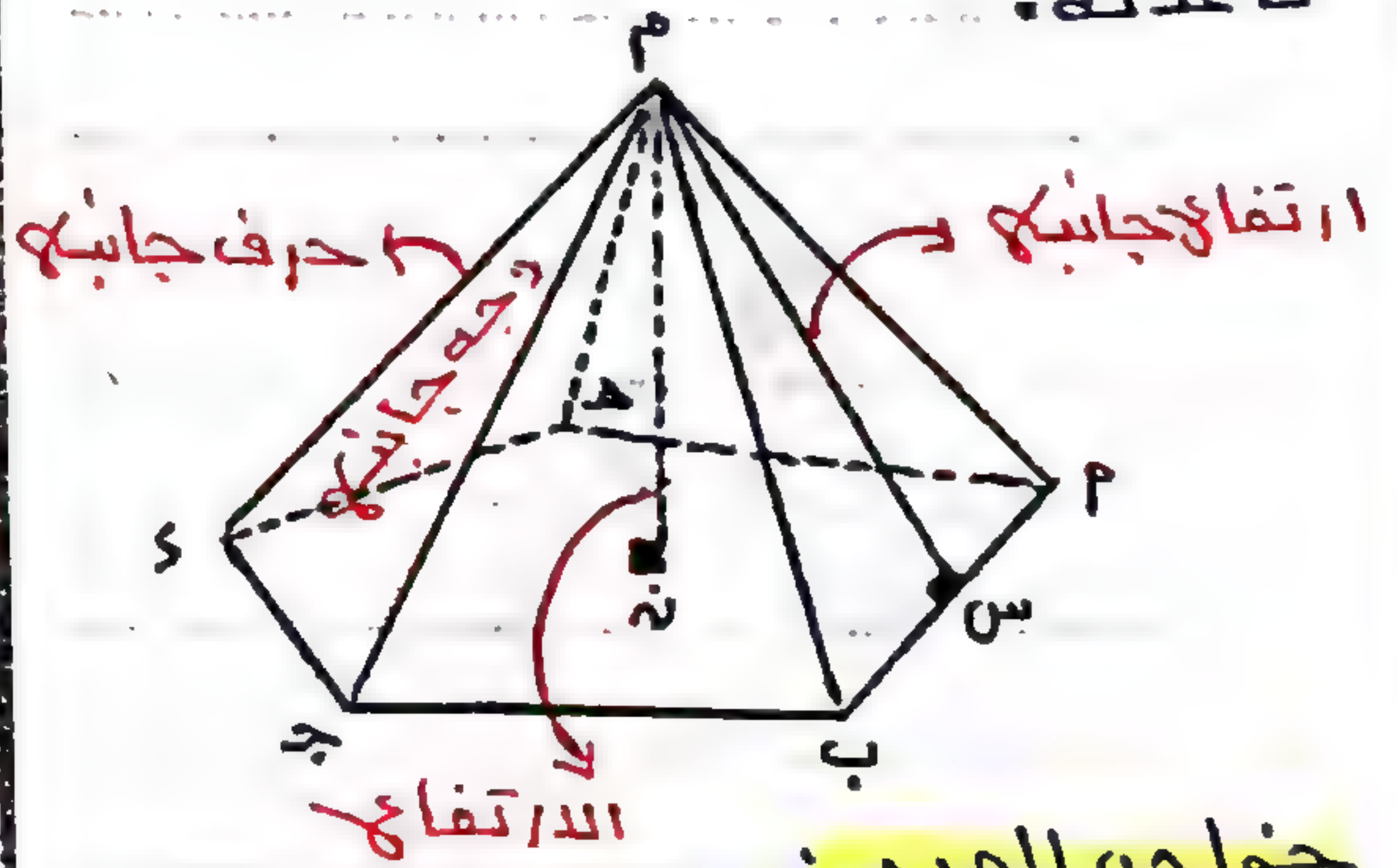
لذلك لو كملت المستوى الأول
م ب د ن ب ا ب ا ب = ع



١٦) (قطر المكعب) = طول الحرف $\times \sqrt{2}$
 $\sqrt{16} = \sqrt{2} \times \sqrt{8}$
 $\sqrt{16} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

٢) الهرم:

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك في رأس واحدة لاتسمى إلا هذه القاعدة وتسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته.



خواص الهرم:

الأوجه الجانبية للهرم سطوح مثلثات عدد ها يساوي عدد أضلاع القاعدة.

ارتفاع الهرم:

هو العمود الساقط من رأس الهرم على مستوي قاعدته.

ارتفاع الهرم الجانبي:

هو العمود الساقط من رأس الهرم على مضلع من أضلاع قاعدة الهرم.

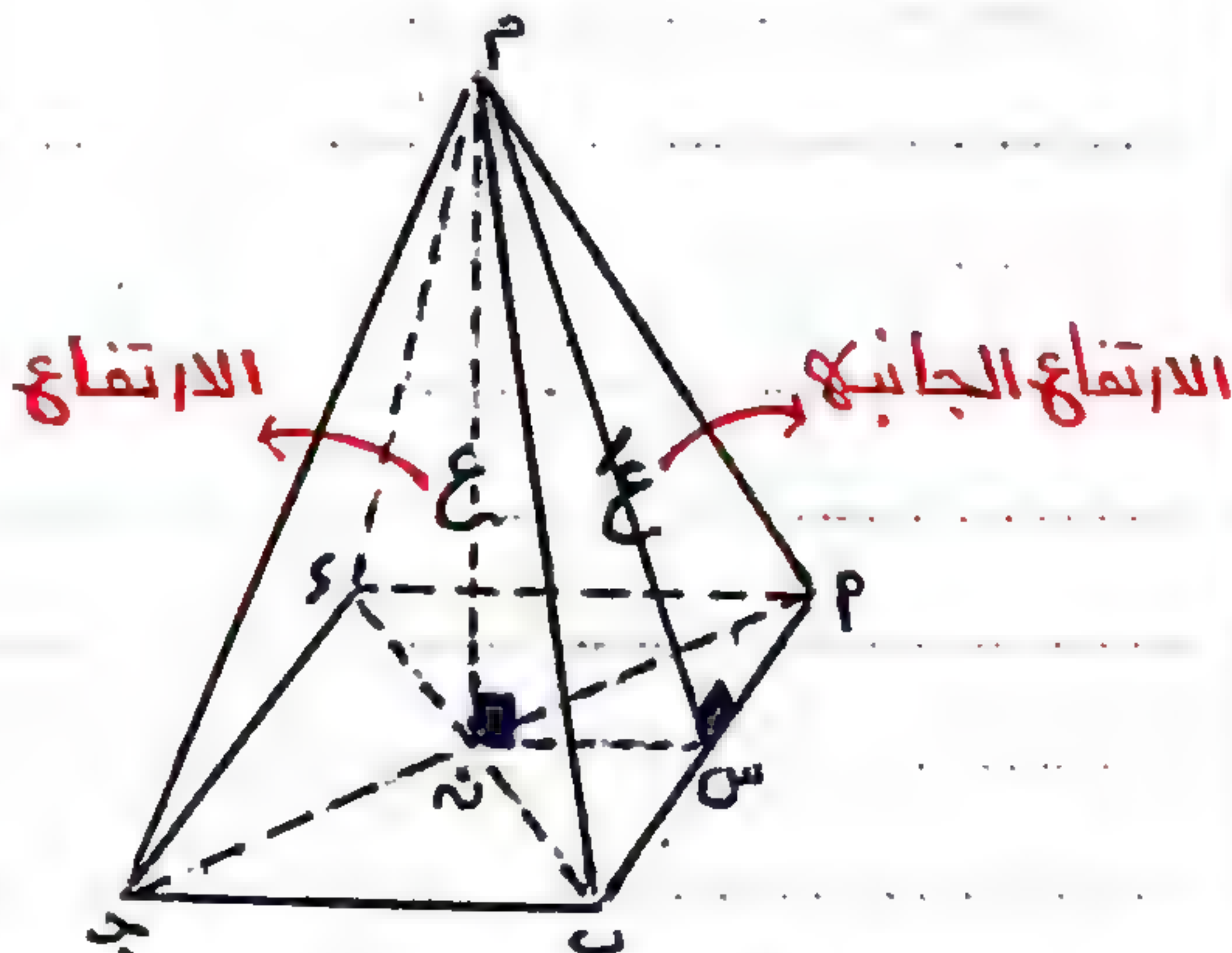
على سبيل المثال:

- $م ب$ وجه جانبي (مثلث)
- $م ج$ حرف جانبي
- $م س$ ارتفاع جانبي
- $م ن$ ارتفاع الهرم
- المضلع الخماسي (ب ج د ه) قاعدة الهرم.

حالات خاصة من الهرم:

(٢) الهرم القائم:

يكون الهرم قائماً إذا كان العمود المرسوم من الرأس على القاعدة يمر بمركزها الهندسي.

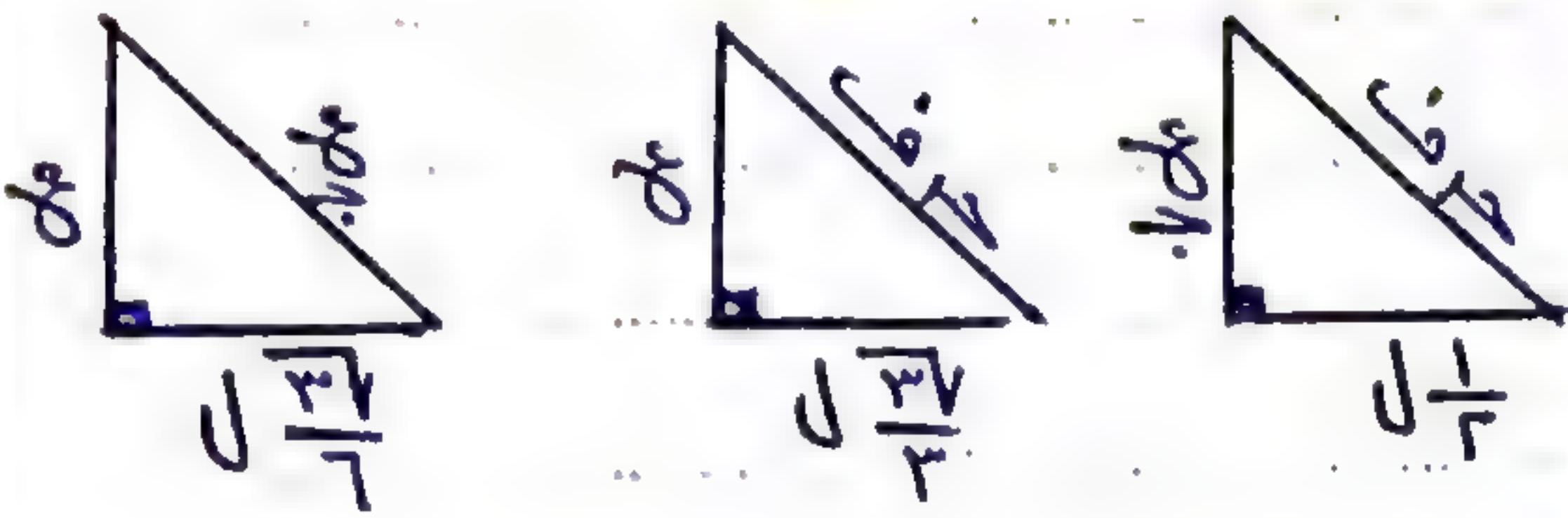


- ∴ $ن$ هو المركز الهندسي للقاعدة ب ج د
- ∴ $م ن$ عمود على مستوي القاعدة ب ج د
- ∴ الهرم (م ب ج د) هرمًا قائماً.

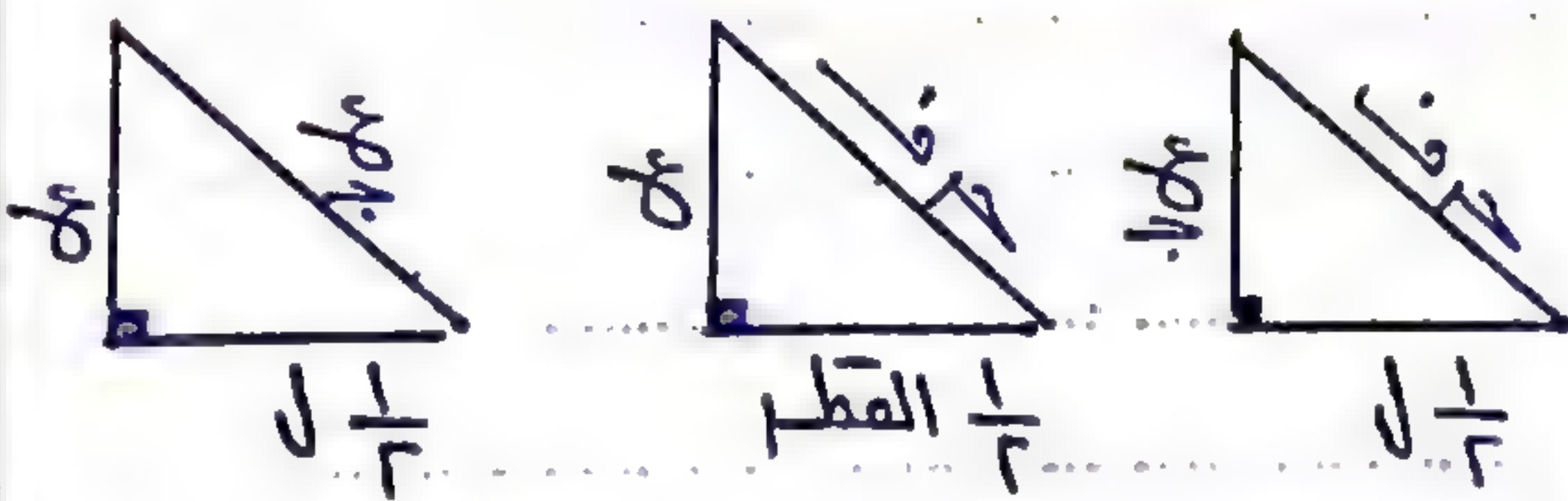
→ الهرم القائم ليس من المزدوجات متساوية
ارتفاعاته الجانبية أو أحرفه الجانبية .

→ المستقيم العمود على كل مستوي يكون
عمودياً على كل مستقيم في المستوي .

→ اختصارات هامة جداً
الهرم الثلاثي المنتظم

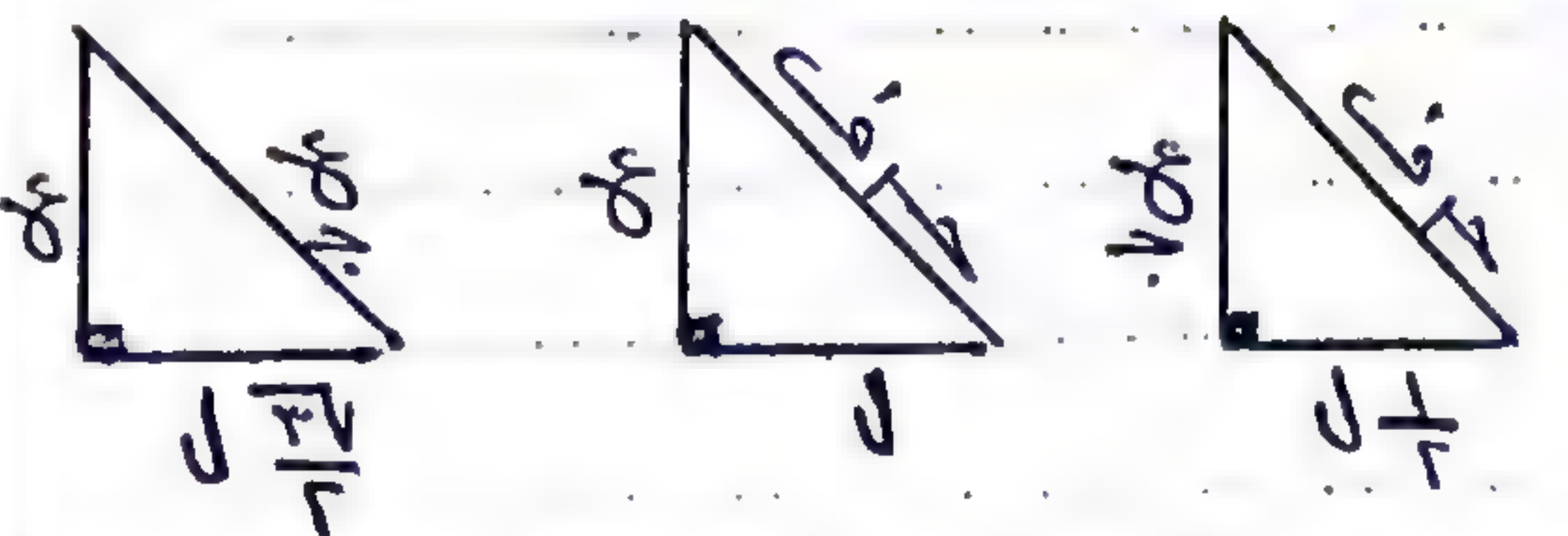


الهرم الرباعي المنتظم



المربع (طول المقعر = $\sqrt{2} \times$ طول الضلع)

الهرم السداسي المنتظم



(l ← طول ضلع القاعدة كـ h ← الارتفاع الجانبية)

(ب) الهرم المنتظم :

هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم .

خصائص الهرم المنتظم :

→ أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين
ومتطابقة .

→ أحرفه الجانبية متساوية في الطول .

→ ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول .

(ج) الهرم الثلاثي منتظم الوجوه :

هو هرم ثلاثي جميع أوجهه مثلثات
متساوية الأضلاع حيث يمكن اعتبار أي منها
قاعدة للهرم .

ملاحظات هامة جداً جداً :

→ المضلع المنتظم فيه :

- الأضلاع متطابقة (متساوية في الطول)
- الزوايا متطابقة (متساوية في المقياس)

→ المركز الهندسي لكل من :

- المثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته .
- متوازي الأضلاع والمربع والمستطيل
- والمعين هو نقطة تقاطع القطرين .

→ كل هرم منتظم هو هرم قائم وليس من
المزدوجات أنه يكون كل هرم قائم منتظم .

← مساحة سطح المخ مضلع منتظم:

$$M = \frac{n}{2} S^2 \text{ ظلًا } \left(\frac{180}{n}\right)$$

أو بصيغة أخرى $M = \frac{n}{2} S^2 \sin\left(\frac{180}{n}\right)$

$$M = \frac{n}{2} S^2 \sin\left(\frac{180}{n}\right)$$

← عدد الأضلاع n ← طول الضلع S

← مساحة المثلث:

$$M = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$M = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r} \times \text{جاء}$$

$$M = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r} \times \text{جاء}$$

← تمثل نصف محيط المثلث

← أطوال أضلاع المثلث

← مركز المخ هو المربع:

$$\leftarrow \text{طول المقعر} = \sqrt{2} \times \text{طول الضلع}$$

$$\therefore \text{طول الضلع} = \frac{\text{طول المقعر}}{\sqrt{2}}$$

← قاعدة أوليكر:

للمخ مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون:

$$\text{عدد الأوجه} + \text{عدد الرؤوس} = \text{عدد الأحرف} + 2$$

مثلاً: الهرم الخماسي:

$$\text{عدد الرؤوس} = \text{عدد الأوجه} = 5$$

$$\text{فيكون عدد الأحرف} = 5 + 2 = 7$$

← أهم القواسم:

← المساحة الجانبية والكتلة للهرم المنتظم:

$$\leftarrow \text{الجانبية} = \frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{ع}$$

$$\leftarrow \text{الكتلة} = \text{الجانبية} + \text{مساحة القاعدة}$$

$$\leftarrow \text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ع}$$

← الهرم الثلاثي منتظم الوجوه:

$$\leftarrow \text{ع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ل}$$

$$\leftarrow \text{ع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ل}$$

$$\leftarrow \text{المساحة الجانبية} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ ل}^2$$

$$\leftarrow \text{المساحة الكلية} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ ل}^2$$

$$\leftarrow \text{الحجم} = \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ ل}^3$$

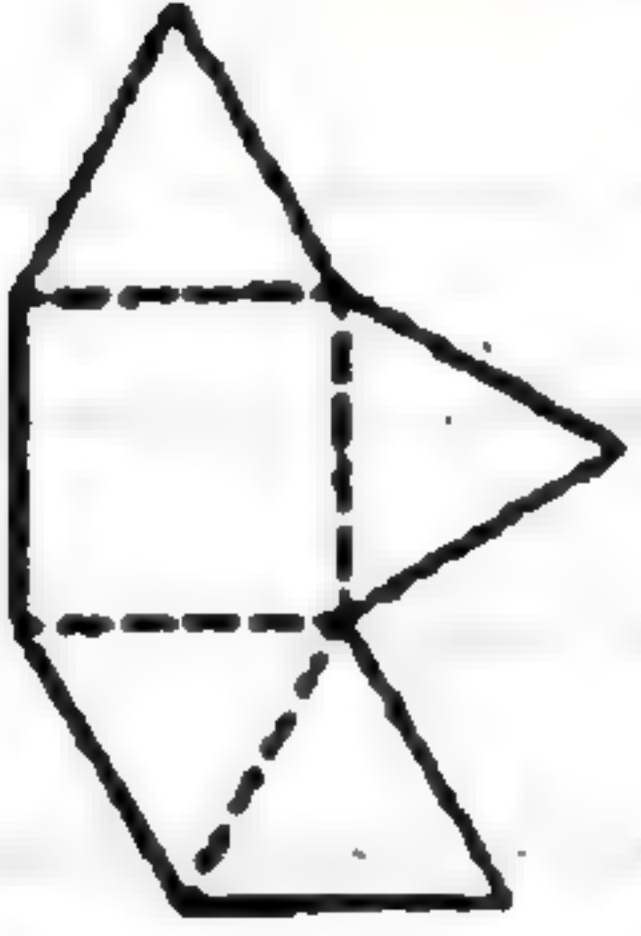
$$\leftarrow 2 \text{ ل}^2 = 3 \text{ ع}^2 \text{ (هامة جداً)}$$

← طول الحرف

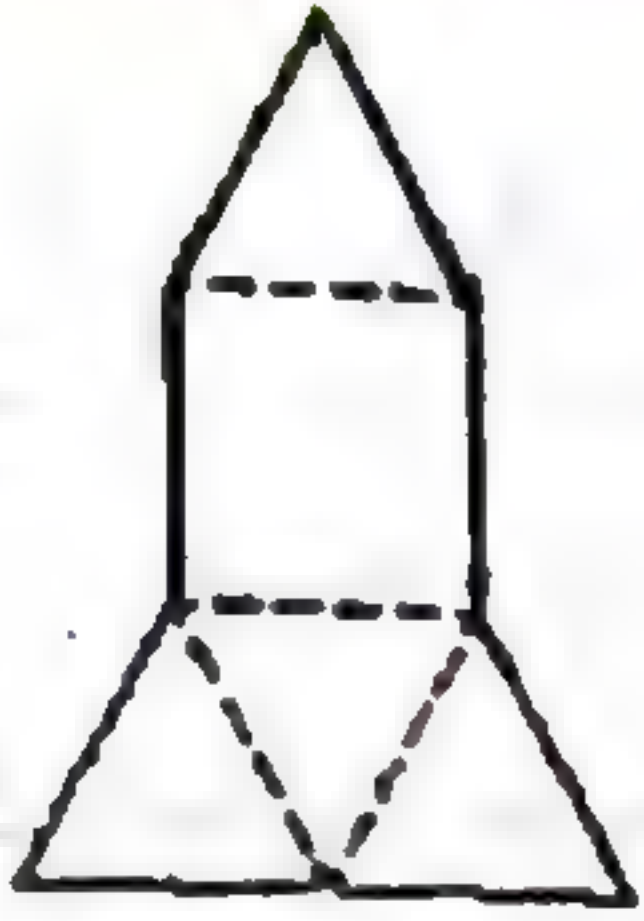
← الارتفاع

← الارتفاع الجانبي

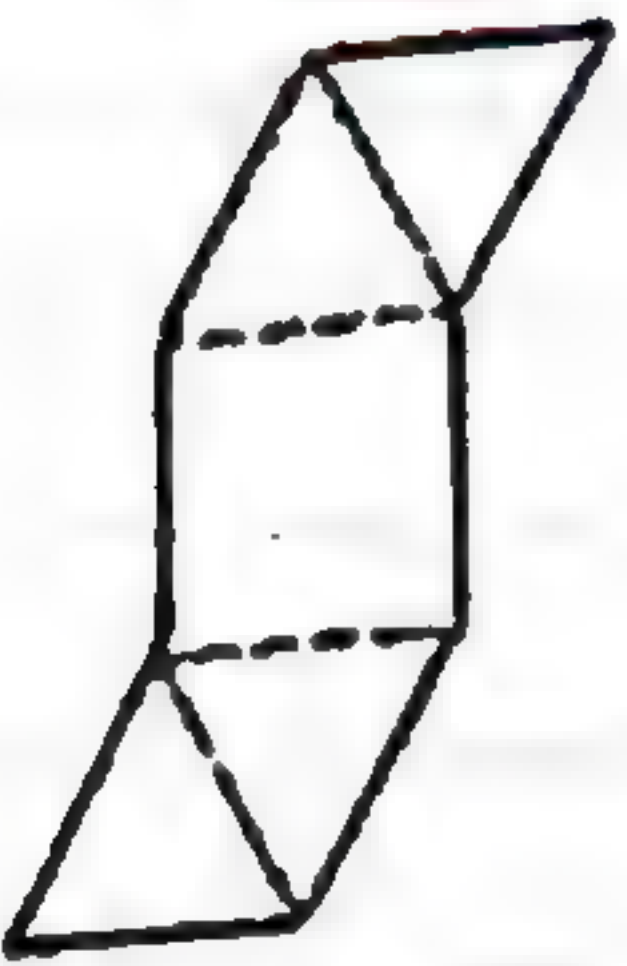
أ. السبيلات التالية لا تصنع هرمًا
رباعيًا منتظمًا عند طيها:



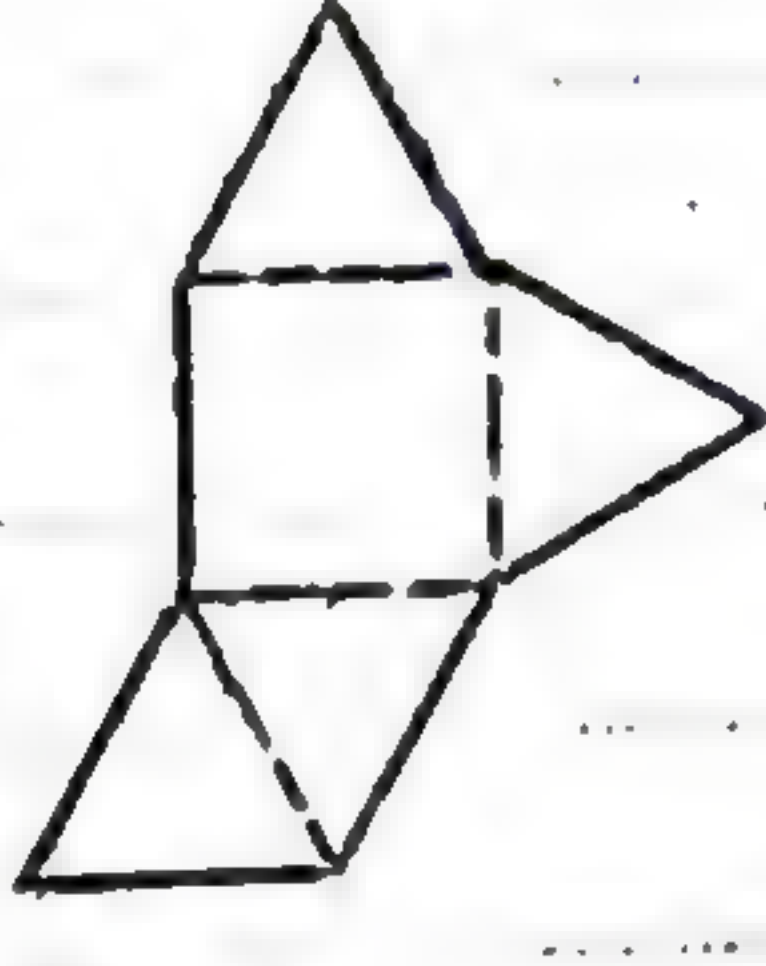
(ب)



(ب)



(د)



(ج)

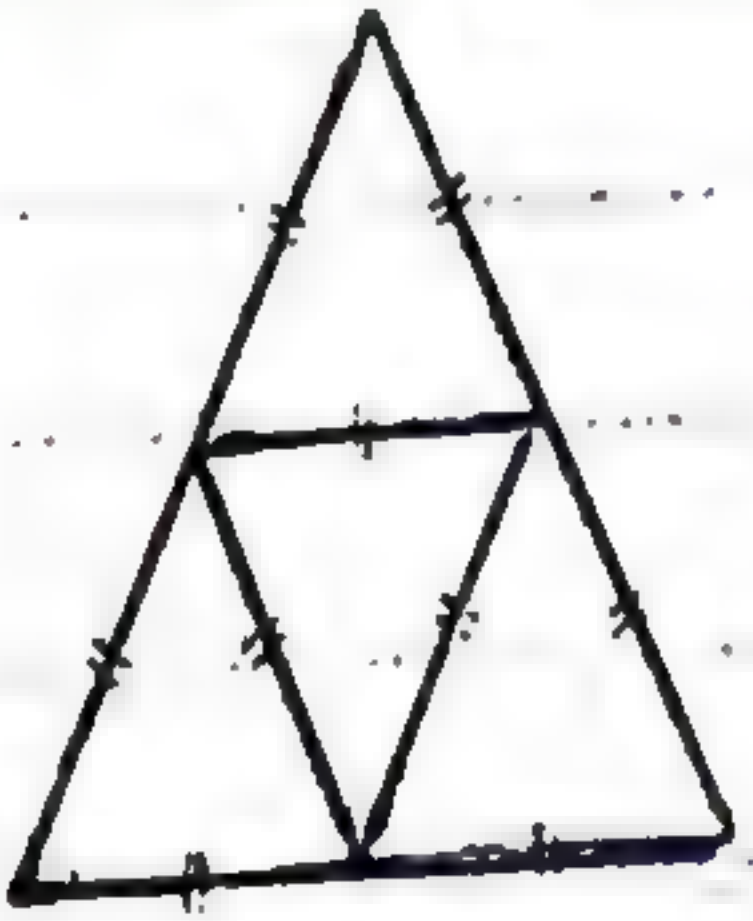
أ. المحسمات يميز عن الشبكة المقابلة:

(أ) هرم رباعي

(ب) هرم رباعي منتظم

(ج) هرم ثلاثي منتظم الوجوه

(د) غير ذلك



تأريفي محاولة

اختار:

أ. الجمل الآتية صحيحة:

(أ) الأوجه الجائبة للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(ج) ارتفاعات الأوجه الجائبة للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التي يحدد محسم = 3 مستويات

أ. الجمل الآتية غير صحيحة:

(أ) الهرم القائم يمكن أن تكون قاعدته سطح مربع.

(ب) الهرم الثلاثي له ثلاثة أوجه.

(ج) الهرم الخماسي له ستة أوجه.

(د) الهرم الرباعي على جميع أوجهه الجائبة سطوح مثلثات.

كم الهرم السداسي يكون:

عدد الأوجه + عدد جميع رؤوسه - عدد
أحرفه =

(أ) 1 (ب) 2

(ج) 3 (د) 4

٤) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية =

$$\begin{array}{ll} (أ) ٤:١ & (ب) ٣:١ \\ (ج) ٤:٣ & (د) ١:١ \end{array}$$

٥) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي منتظم الوجوه : ارتفاعه =
الحل

$$٢\sqrt{3} : ٣ = ٤ : ٢$$

$$٢\sqrt{3} : ٤ = ٣ : ٢$$

$$٢ : ٢\sqrt{3} = ٣ : ٢\sqrt{3} = ٤ : ٢$$

٦) إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه
الحل

$$(أ) تضاعف (ب) لا يتغير$$

$$(ج) تضاعف ٦ مرات (د) تضاعف ٤ مرات$$

الحل

عند زيادة طول الضلع يتضاعف مساحة القاعدة للمكعب فإن المساحة تزداد أربعة أمثاله وكذلك الحجم تضاعف ٤ مرات

٢) هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبية = ٥ سم فإن محيط قاعدته = سم

$$(أ) ٦ \quad (ب) ١٢ \quad (ج) ٢٤ \quad (د) ٣٦$$

الحل

المساحة الجانبية

$$= \frac{1}{3} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$$

$$٣٠ = \frac{1}{3} \times \text{محيط القاعدة} \times ٥$$

$$\therefore \text{محيط القاعدة} = \frac{٣٠ \times ٣}{٥} = ١٨ \text{ سم}$$

٣) ب' ج' د' هـ' ح' ط' ز' مكعب طول

حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم

ب' ج' د' هـ' ح' ط' ز' = سم^٣

$$(أ) ٣٦ \quad (ب) ٧٢ \quad (ج) ١٠٨ \quad (د) ١٤٤$$

الحل

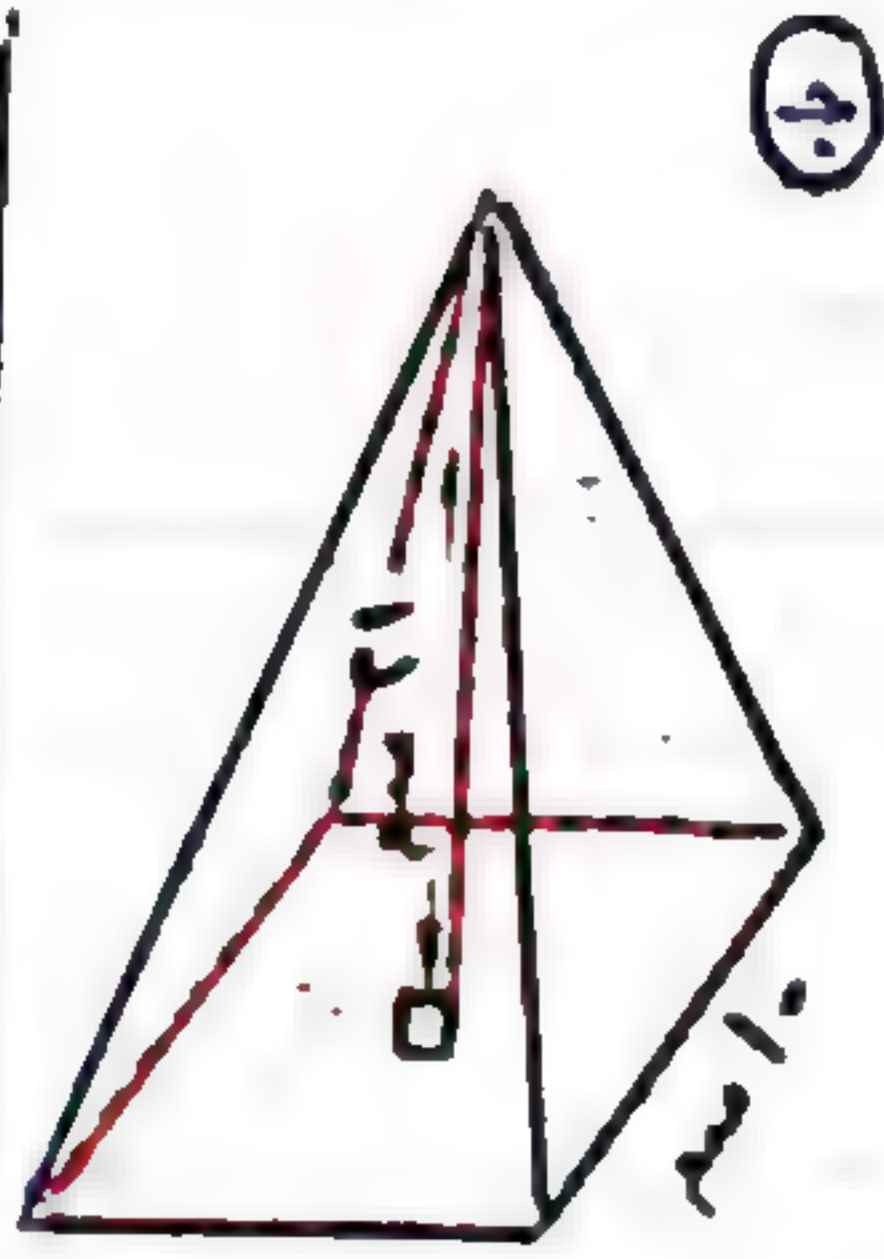
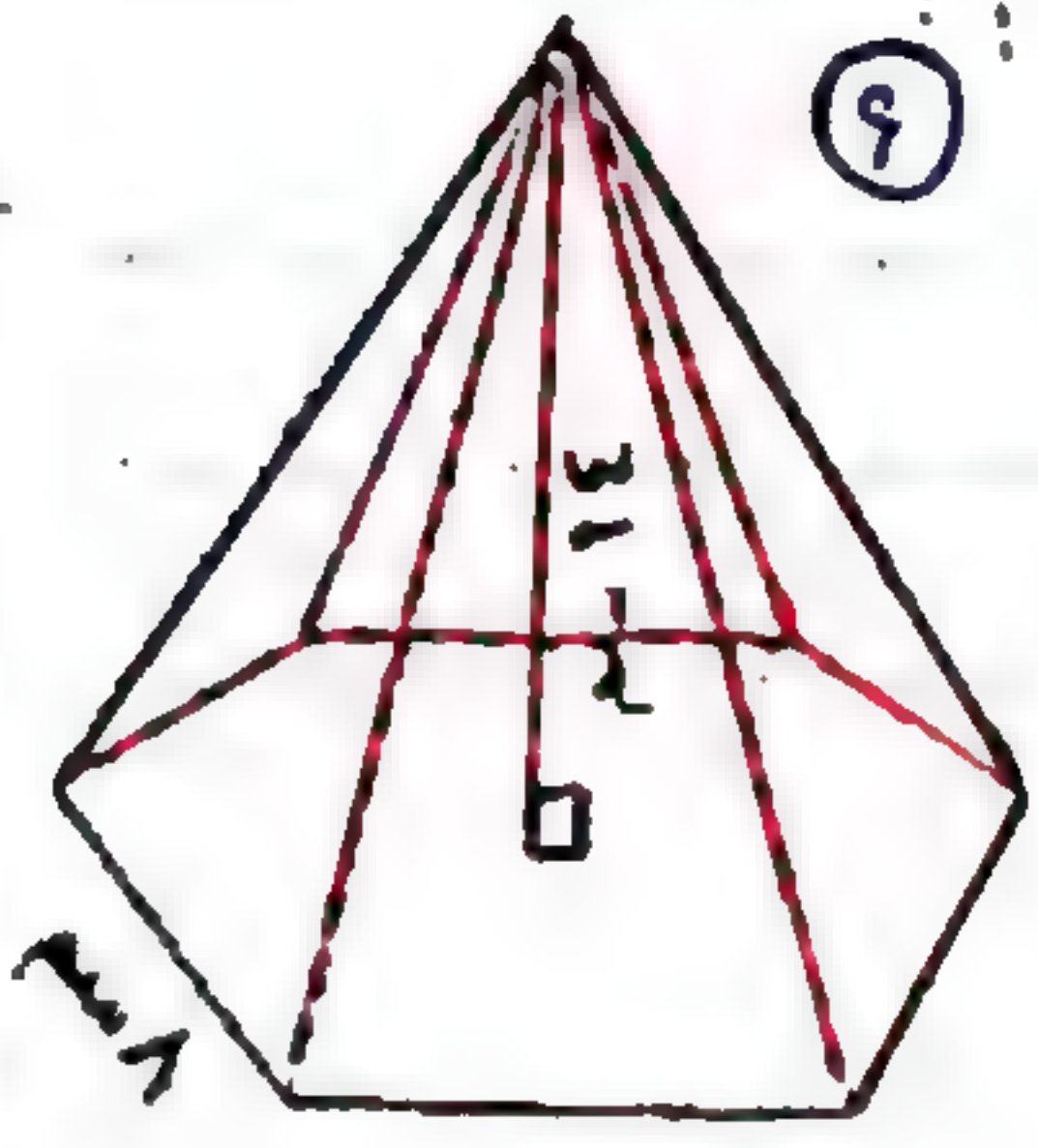
$$= \text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ٧٢$$

$$= ٧٢ \text{ سم}^٣$$

القاعدة مثلثة عكس كذا قولنا

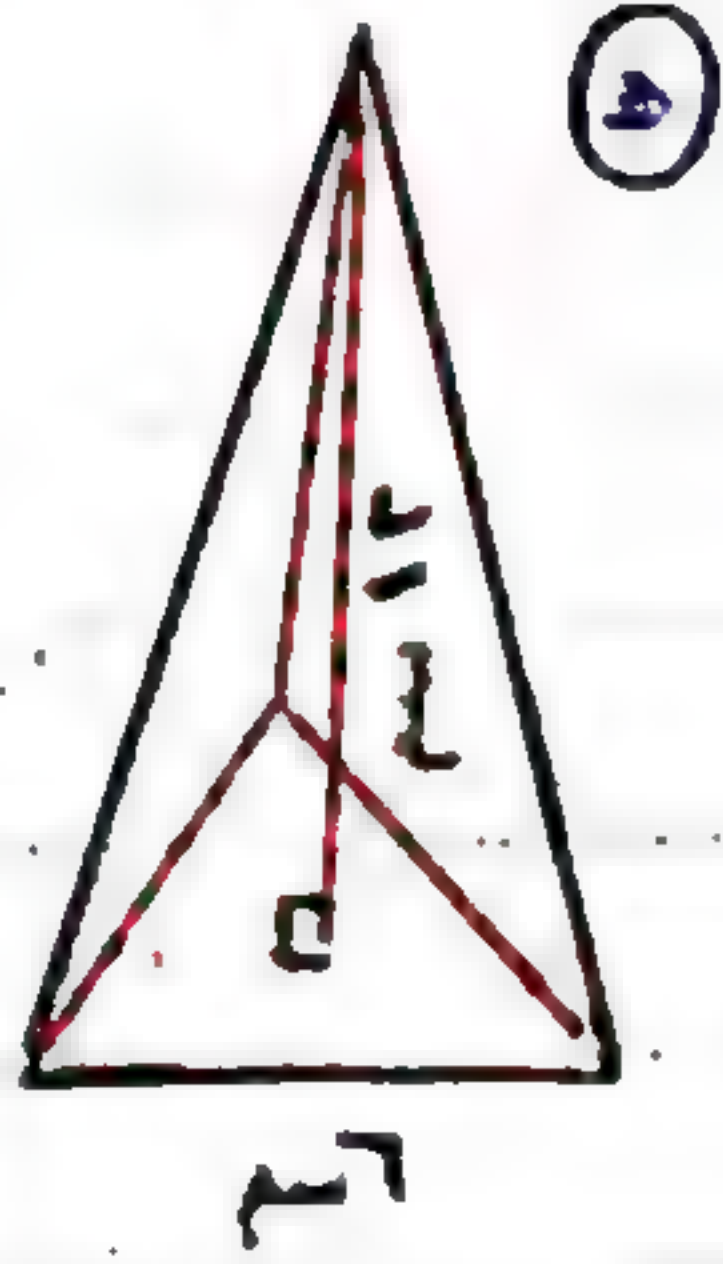
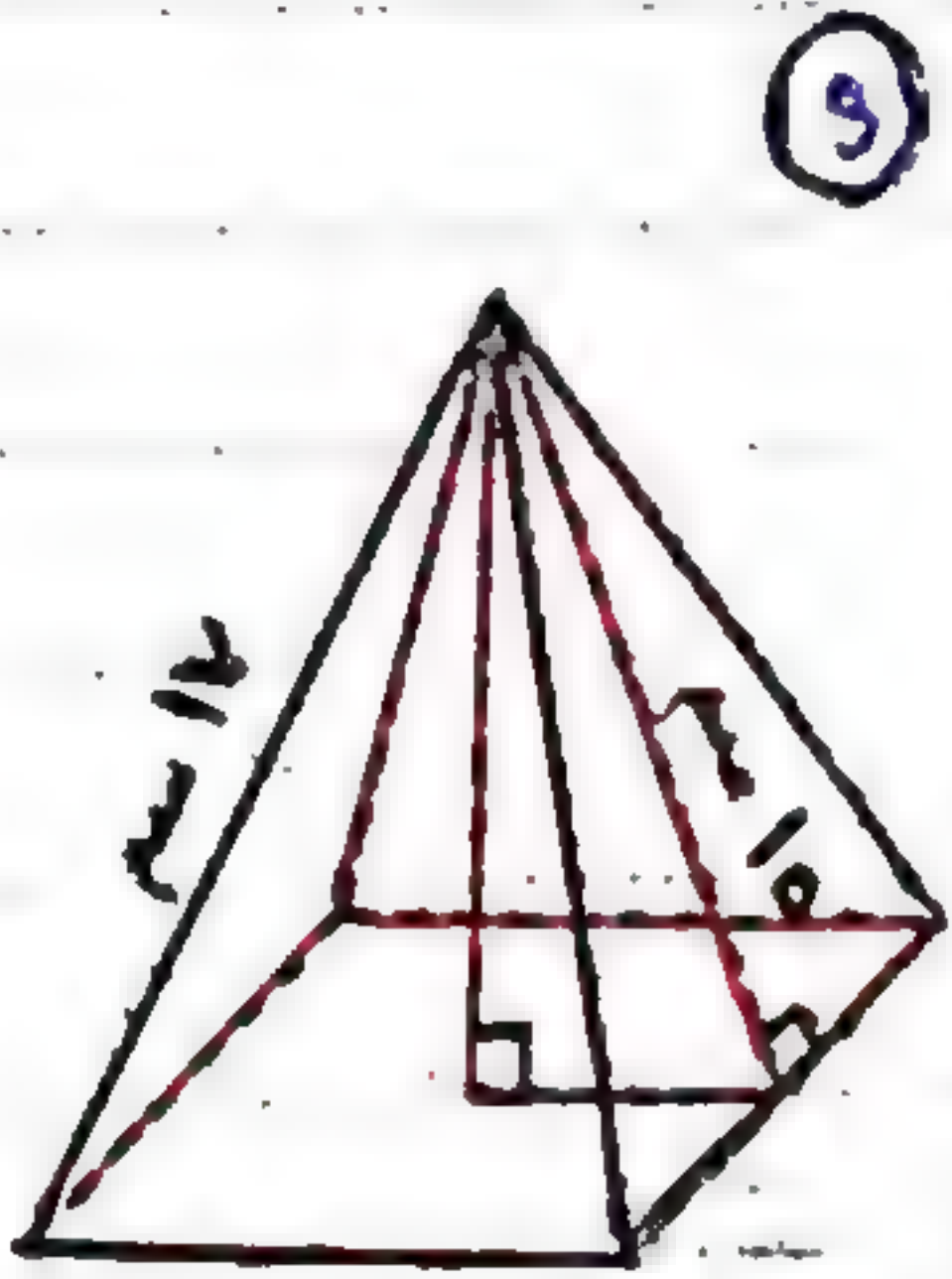
$$\frac{1}{3} \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ٧٢$$



■ إذا قطعنا هرم رباعي منتظم بمستوا
يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث
يكون

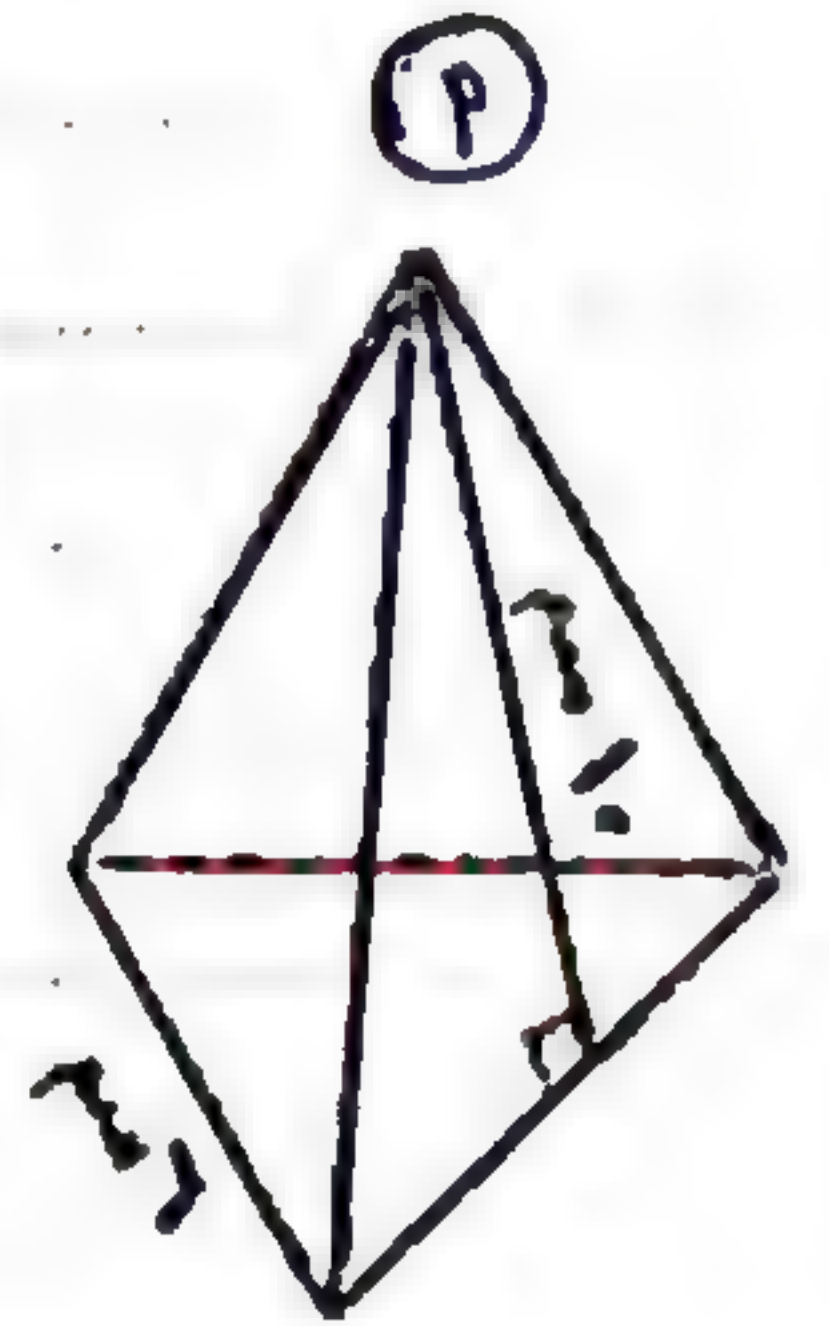
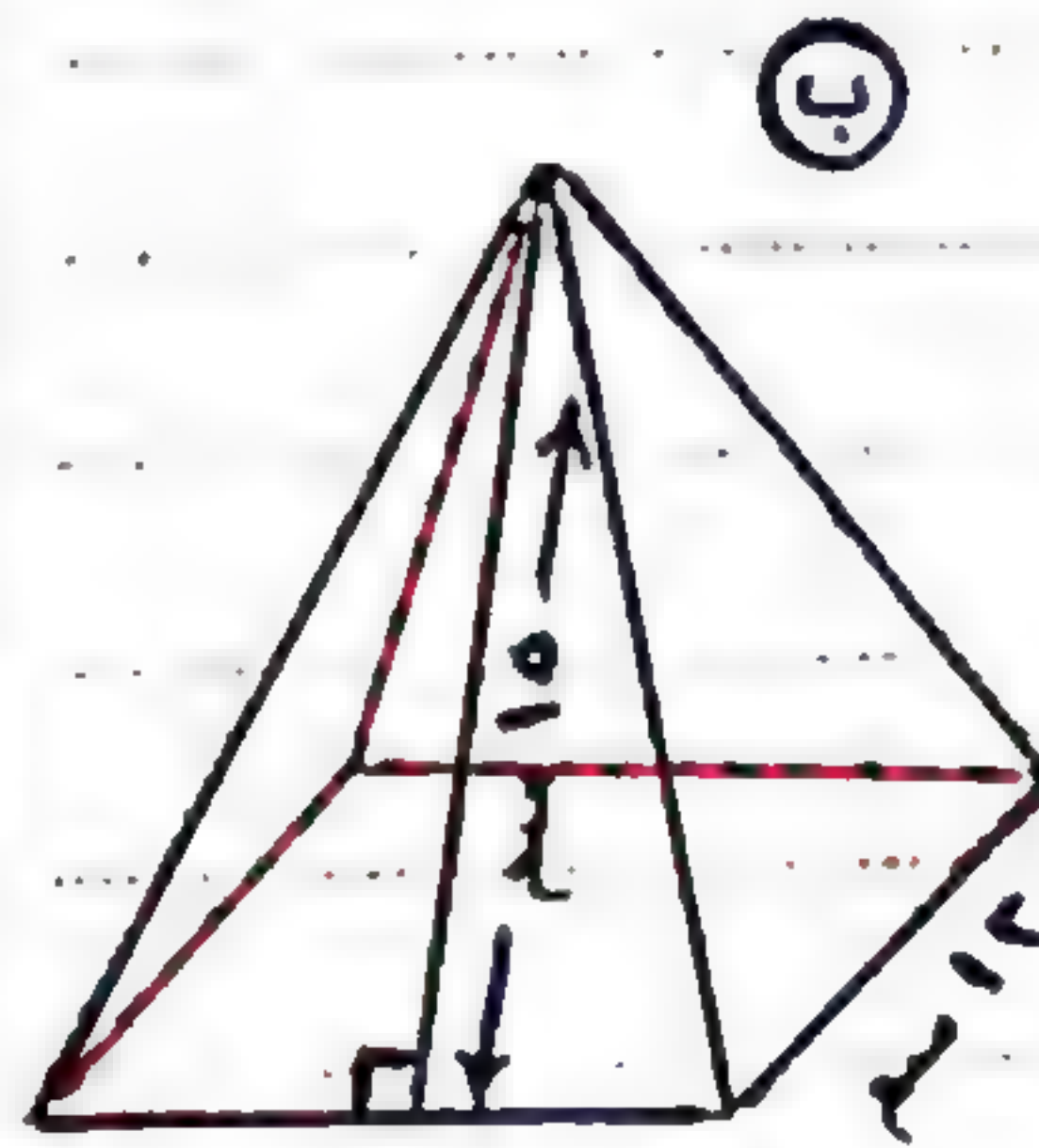
(أ) مثلث (ب) مربع

(ج) مستطيل (د) دائرة



٧) أوجد المساحة الجانبية والكلية
لكل هرم منتظم حسب البيانات المظاه

حل انت يا معلم
وهشوفه حلال



٩) فم الهرم المنتظم رتب الأ طول
التالية من الأصغر إلى الأكبر:

٢) طول الحرف الجانبي

٣) الارتفاع (٤)

٤) الارتفاع الجانبي (٤)

الحل

٤ ثم ٤ ثم الحرف الجانبي

أي أن الترتيب من الأصغر إلى الأكبر هو
ب ك ج م

٨) فم الهرم الخماسي المنتظم أكمل ما
بالنقطة:

■ عدد أوجهه الجانبي؟

الحل

٥

■ عدد الأوجه؟

الحل

$$٦ = ٥ + ١$$

■ عدد الأحرف الجانبي؟

الحل

٥

■ عدد الرؤوس؟

الحل

$$\text{عدد الأوجه} = \text{عدد الرؤوس} = ٦$$

■ عدد الأحرف؟

من قاعدة أوليس:

$$\text{عدد الأحرف} = \text{الرؤوس} + \text{الأوجه} - ٢$$

$$١٠ = ٦ + ٦ - ٢ =$$

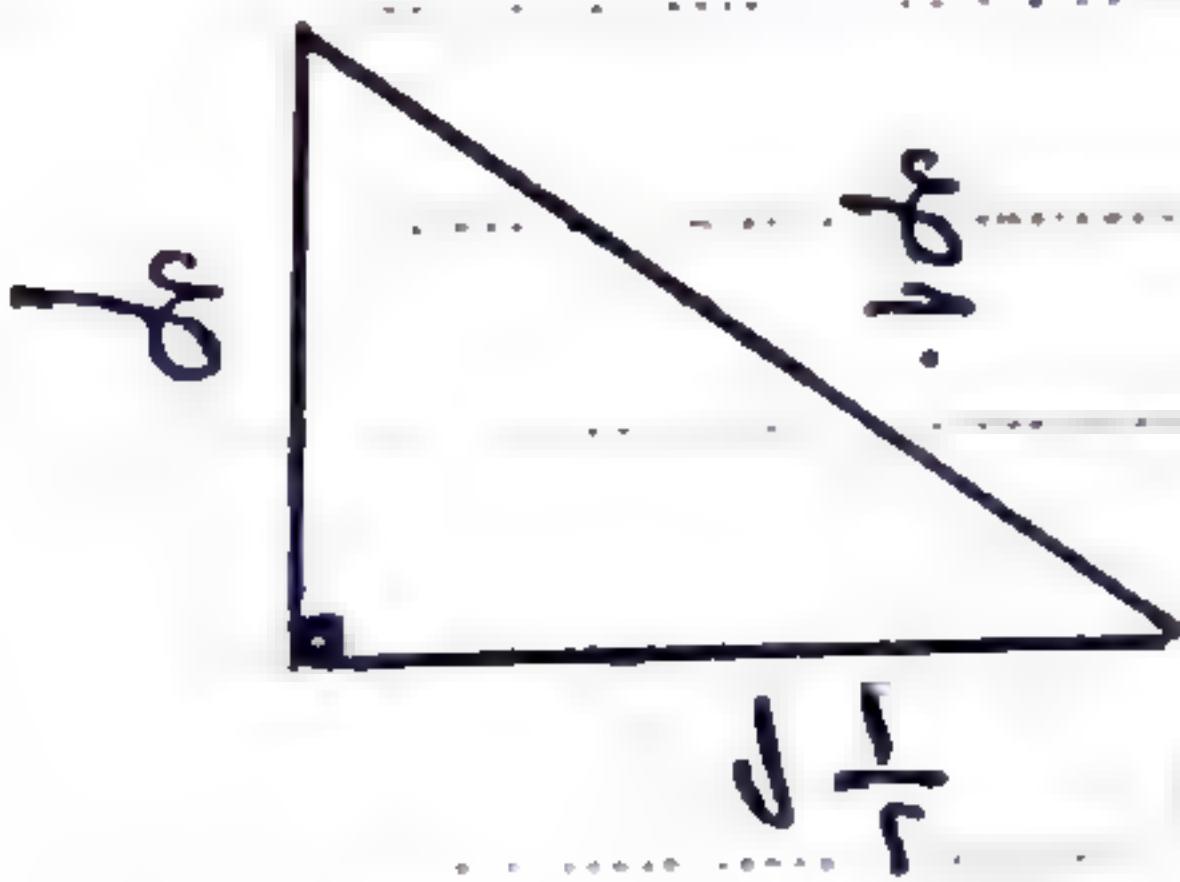
١٠) هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو)

هو هرم رباعي منتظم طول قاعدته

٢٣٤ متراً والارتفاع الجانبي ١٨٦ متراً

أوجد ارتفاع الهرم؟

الحل



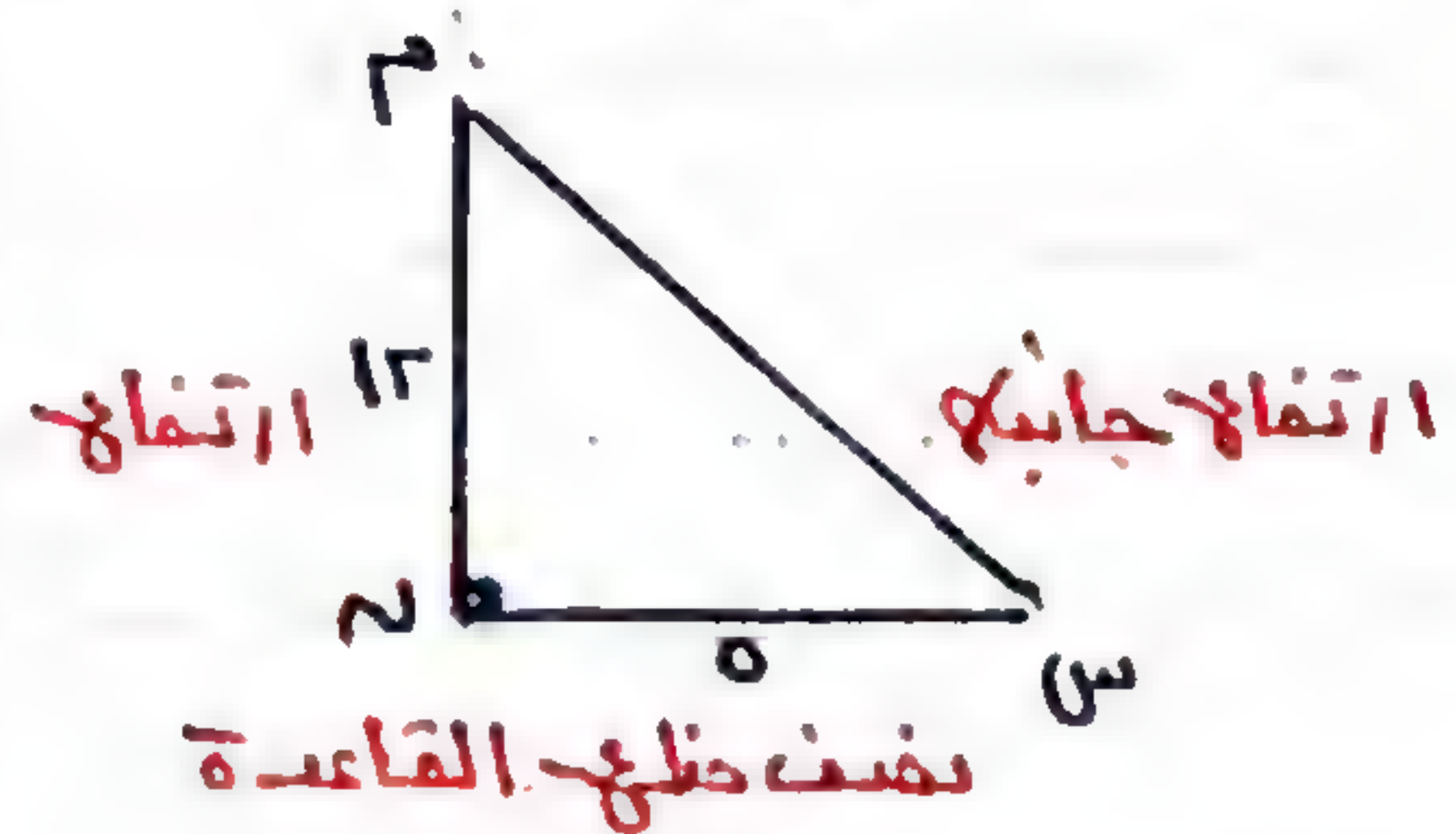
$$\frac{١٨٦}{٢} = ٩٣ = ٢٣٤ \times \frac{١}{٢} = \frac{١١٦}{٢}$$

$$\frac{١٨٦}{٢} = ٩٣$$

$$\therefore \frac{١٨٦}{٢} = ٩٣ = \frac{١١٦}{٢} - \frac{١١٦}{٢} = ١٤٥,٤ \text{ م}$$

١١) م ب ح هـ هرم رباعي منتظم
طول منلحه قاعدته يساوي ١٠ سم
وارتفاعه ١٢ سم .. أوجد ارتفاعه
الجانبية ؟

الحل

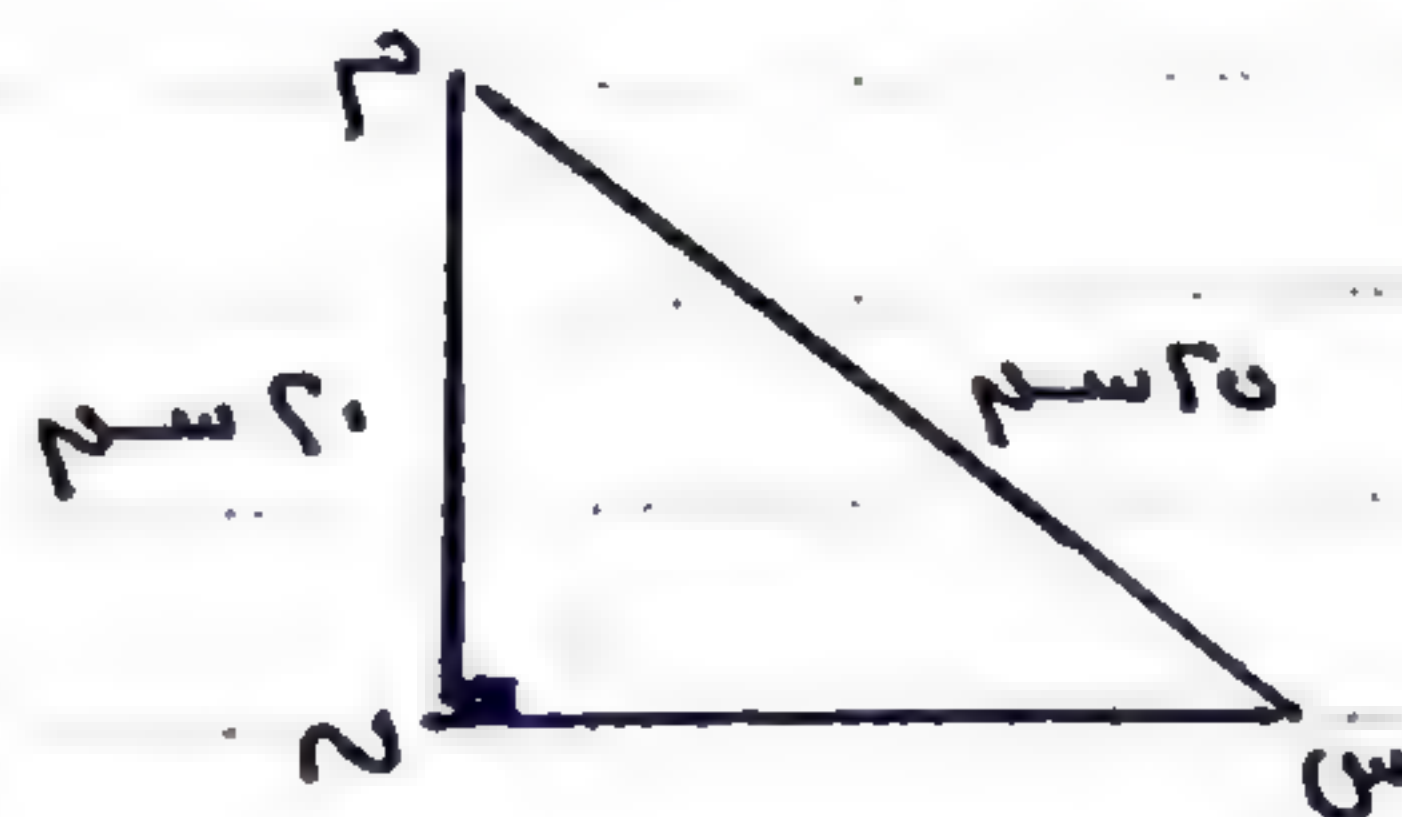


∴ الارتفاع الجانبية (م س)

$$\# \text{ م س} = \sqrt{10^2 + 12^2} = 16 \text{ سم}$$

١٢) م ب ح هـ هرم رباعي منتظم
ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبية
٢٥ سم أوجد طول منلحه قاعدة
الهرم ؟

الحل

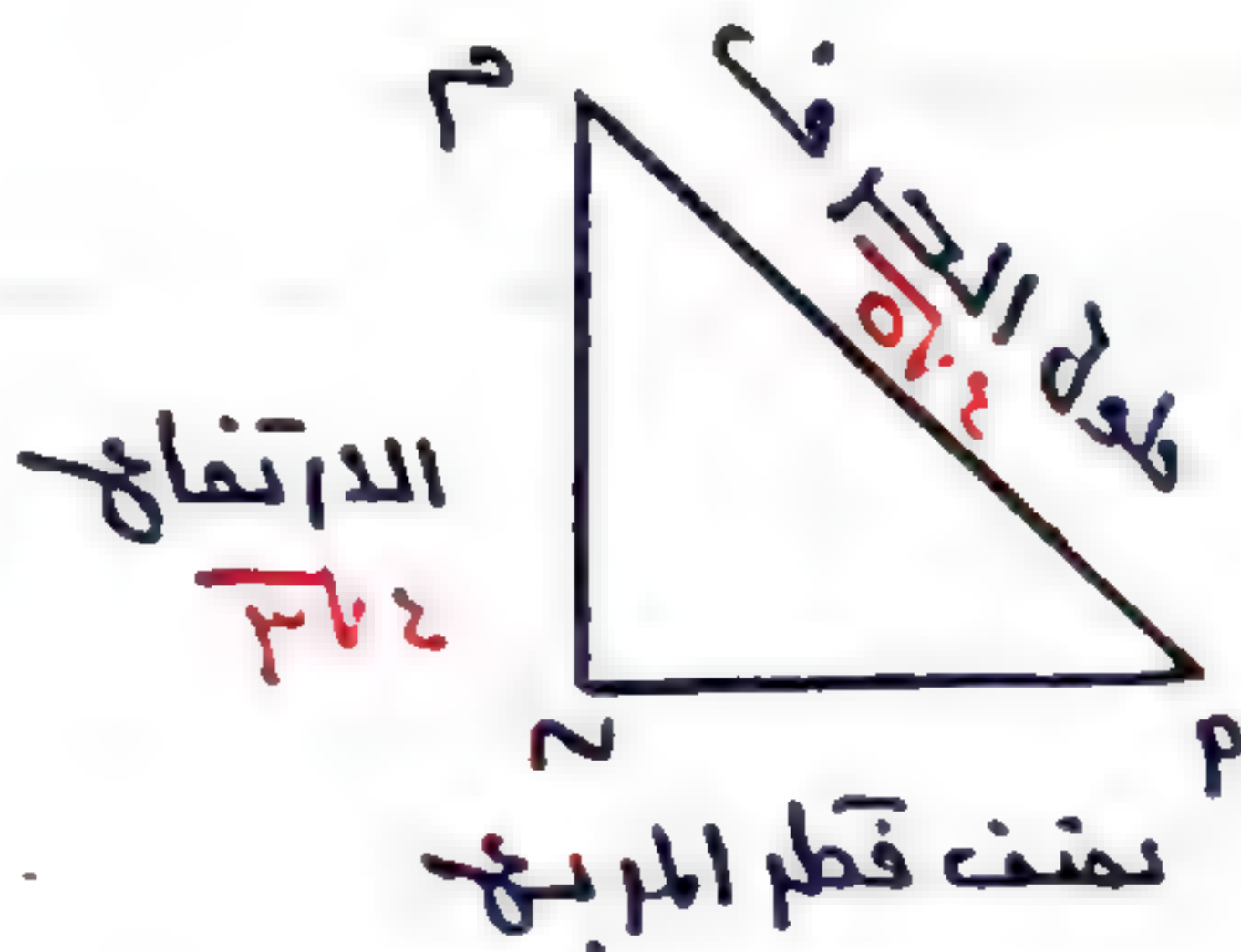


$$\# \text{ م س} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ سم}$$

∴ طول منلحه القاعدة = ٢ × ١٥ = ٣٠ سم

١٣) م ب ح هـ هرم رباعي منتظم
قاعدته المربع م ب ح هـ فانها كانت
ارتفاعه يساوي ٣٧٤ سم وطول
حرفه الجانبية م س = ٥٧٤ احسب
طول منلحه قاعدته ؟

الحل



$$\# \text{ م پ} = \sqrt{574^2 - 374^2} = 438 \text{ سم}$$

∴ المقطر للمربع :

$$\# \text{ م پ} = 438 \times 2 = 876 \text{ سم}$$

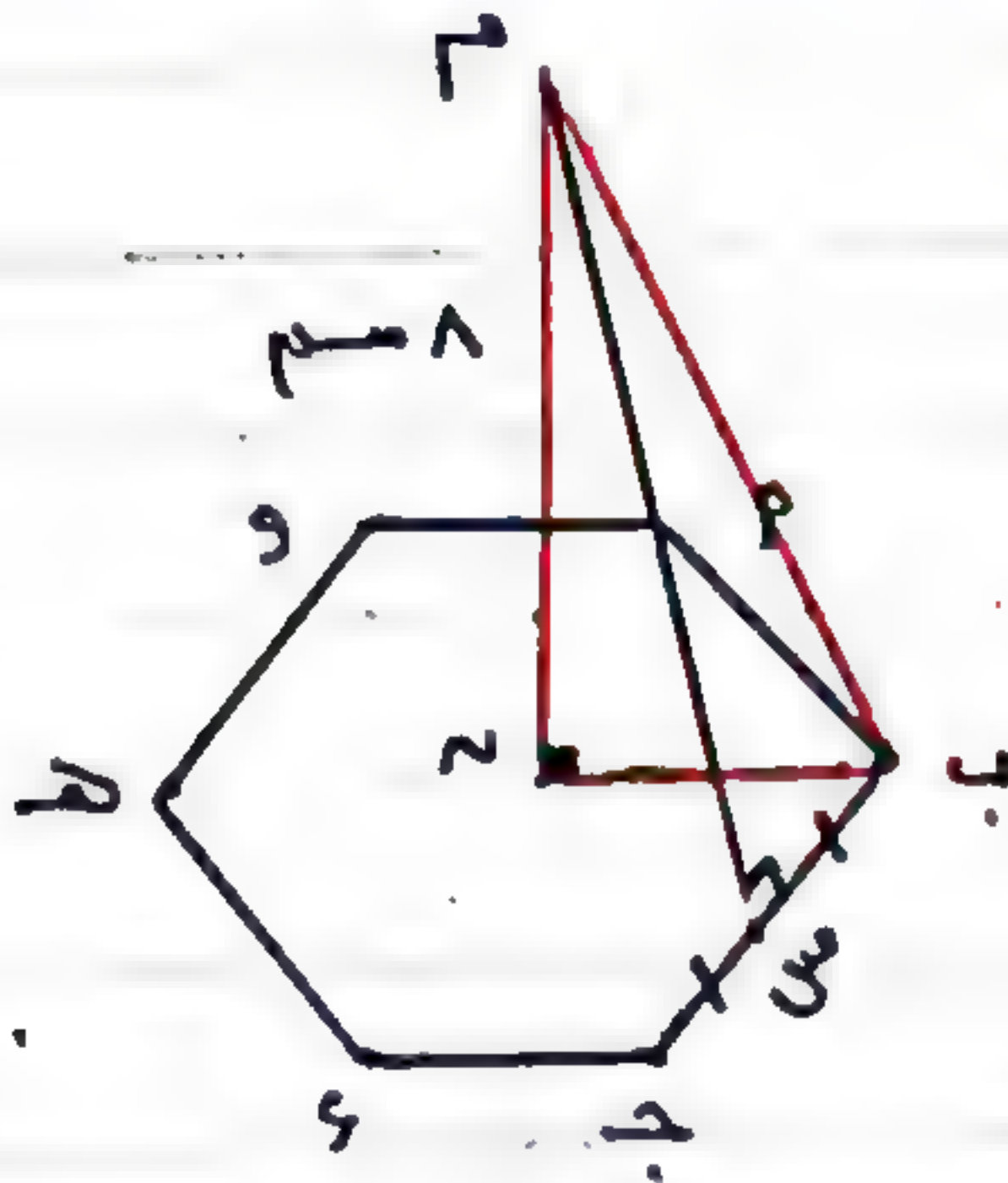
فاكم د هـ :

$$\text{طول منلحه المربع} = \frac{\text{المقطر}}{2}$$

$$\# \text{ م هـ} = \frac{876}{2} = 438 \text{ سم}$$

- ١٥) هرم سداسي منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه ٣٦٢٤ سم احسب طول حرف وارتفاع الهرم الجانبي؟

الحل



- طول حرف السداسي = $\frac{3624}{6} = 604$ سم
 • من خصائص السداسي $ن = \frac{1}{2}$ طول حرفه
 $\therefore 604 = ن$

• م ن ب :

$$م ب = \sqrt{604^2 + 604^2} = 852 \text{ سم}$$

وهو طول الحرف #

• م س ب :

$$م س = \frac{1}{2} م ب = \frac{1}{2} \times 852 = 426 \text{ سم}$$

$$\therefore م س = \sqrt{426^2 - 604^2} = 1000$$

• = ١٠ سم

و هو ارتفاع الهرم الجانبي #

- ١٤) اذا كان : م ب ج هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول الـ حرف من ا ح ر ف ه ٣٦٨ سم اوجد :

- ارتفاع الجانبي
- ارتفاع الهرم
- المساحة الكلية للهرم
- حجم الهرم

الحل

∴ الهرم الثلاثي منتظم الوجوه

• الارتفاع الجانبي :

$$= \frac{\frac{36}{2}}{\frac{36}{2}} \times 368 = 368 \text{ سم}$$

• ارتفاع الهرم :

$$= \frac{\frac{36}{2}}{\frac{36}{2}} \times 368 = 368 \text{ سم}$$

• المساحة الكلية :

$$= 36^2 \times 368 = 36^2 \times 368 \text{ سم}$$

• الحجم :

$$= \frac{36^2}{12} \times 368 = 36^2 \times 368 \text{ سم}$$

$$= 36^2 \times 368 \text{ سم}$$

١٦) اذا كان م ب ج هـ هرم رباعي

قاعدته م ب ج هـ على شكل مستطيل

ن نقطة تقاطع قطريه فانا كانت

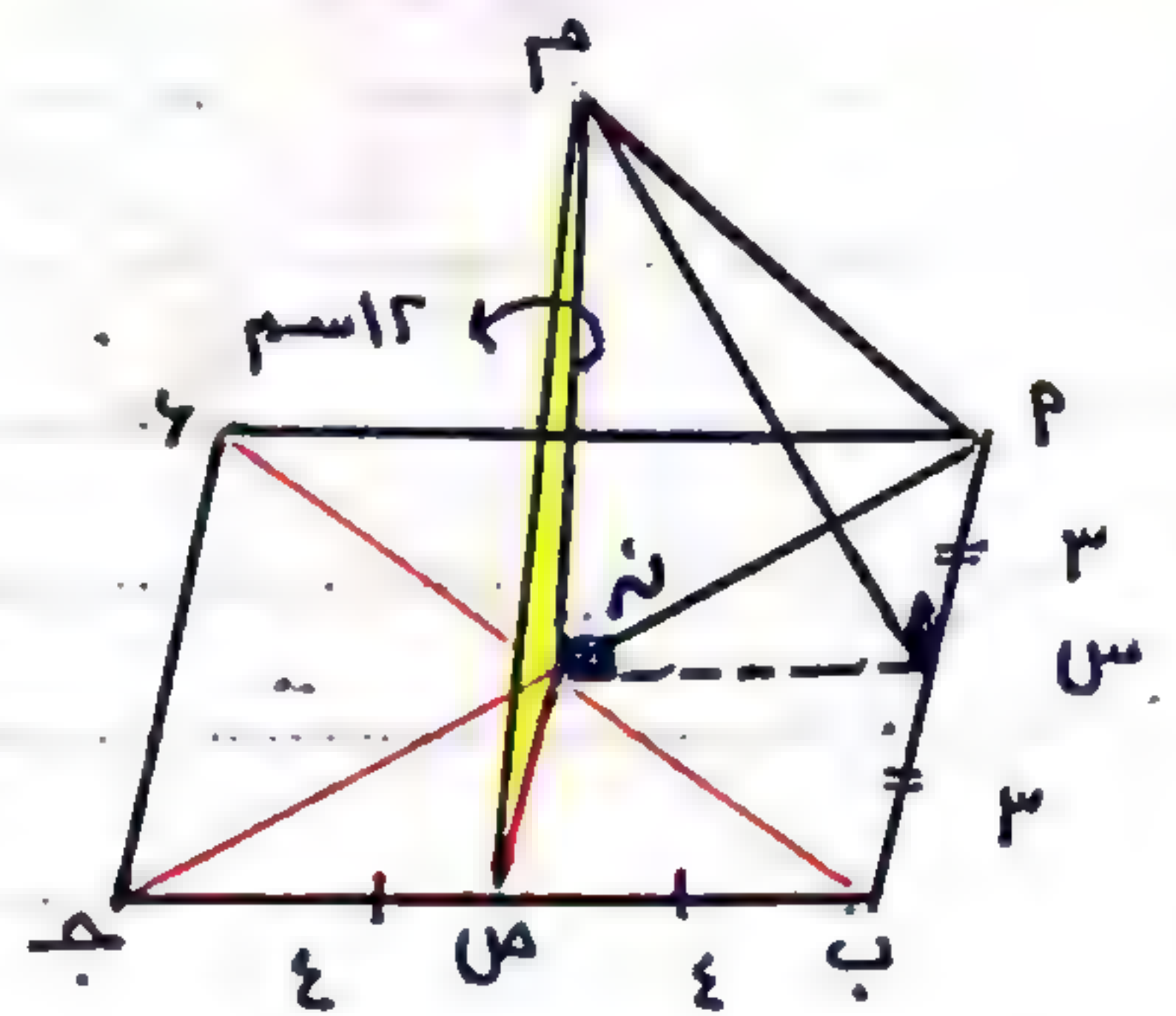
م ب = ١٢ سم، م ج = ٨ سم، م هـ = ١٢ سم
أوجد

طول الحرف الجانبي

طول م س، م حيث س منتصف م ب

م منتصف ب ج

الحل



م ب ج هـ :

$$م ب = \sqrt{١٢^2 + ٨^2} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore م ب = \frac{١}{٢} م ب ج = ٥ \text{ سم}$$

م ب ج هـ :

$$م ب = \sqrt{١٢^2 + ١٢^2} = ١٧ \text{ سم}$$

وهو طول الحرف الجانبي #

م ب ج : س منتصف م ب، م هـ منتصف

$$م ج = ٨ \text{ سم} \therefore م س = ٤ \text{ سم}$$

م ب ج هـ :

$$م ب = \sqrt{١٢^2 + ٨^2} = ١٧ \text{ سم}$$

بالمثل م ج هـ

$$\therefore م ب = \frac{١}{٢} م ب ج = ٨ \text{ سم}$$

م ب ج هـ :

$$م ب = \sqrt{١٢^2 + ١٢^2} = ١٧ \text{ سم}$$

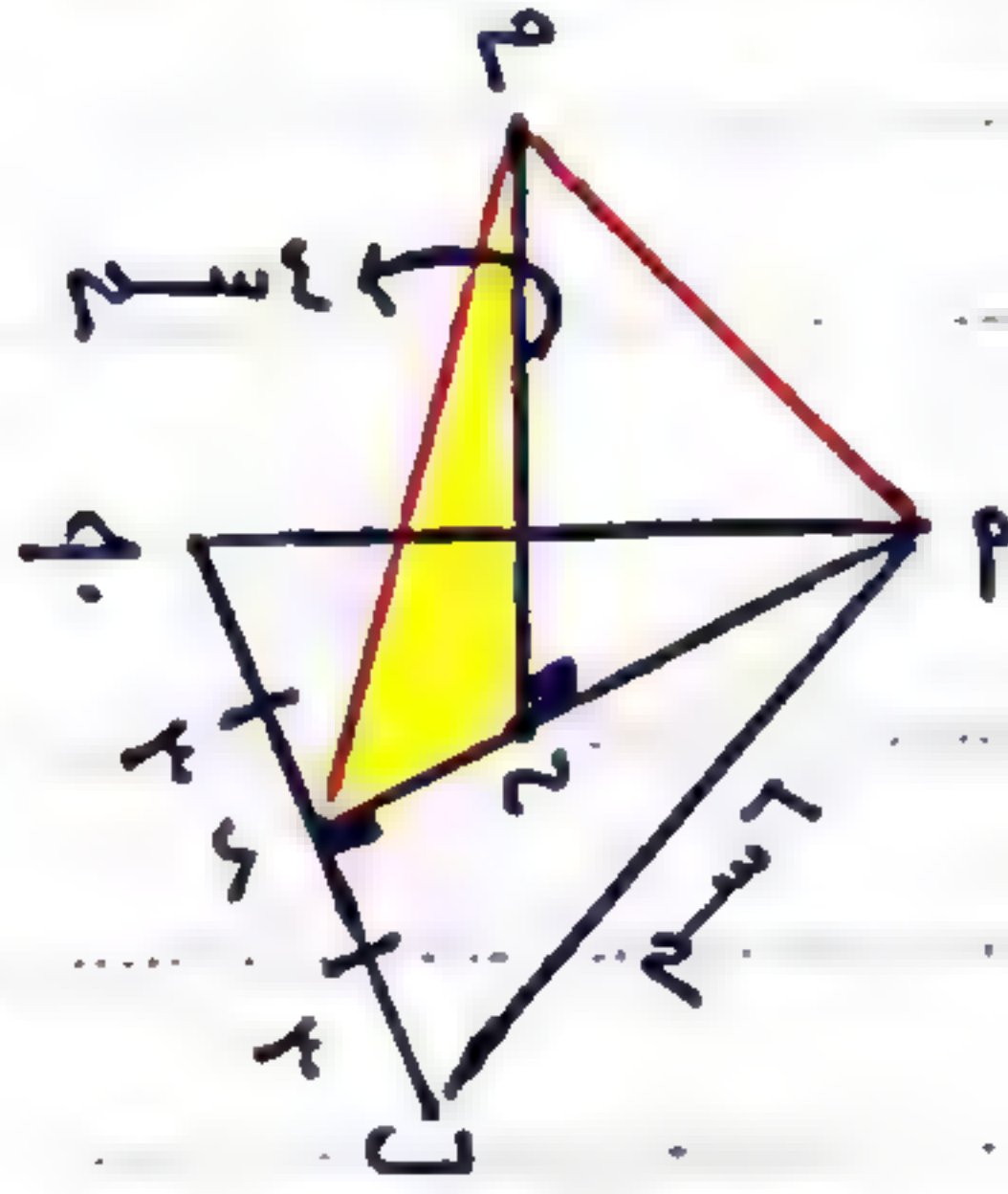
١٧) اذا كان م ب ج هـ هرم ثلاثي منتظم

قاعدته م ب ج هـ طول ضلعي قاعدته

٦ سم، ارتفاعه ٤ سم، أوجد طول

حرف وارتفاع الهرم الجانبي؟

الحل



$$م ب ج هـ : م ب ج هـ = ٦ \text{ سم}$$

$$\therefore م ب ج هـ = ٦ \text{ سم}$$

$$م ب ج هـ : م ب ج هـ = ٦ \text{ سم}$$

وهو طول الحرف

$$م ب ج هـ = ٦ \text{ سم}$$

$$م ب ج هـ : م ب ج هـ = ٦ \text{ سم}$$

وهو ارتفاع الهرم الجانبي

(كان ممكن نحل باستخدام الاختصارات)

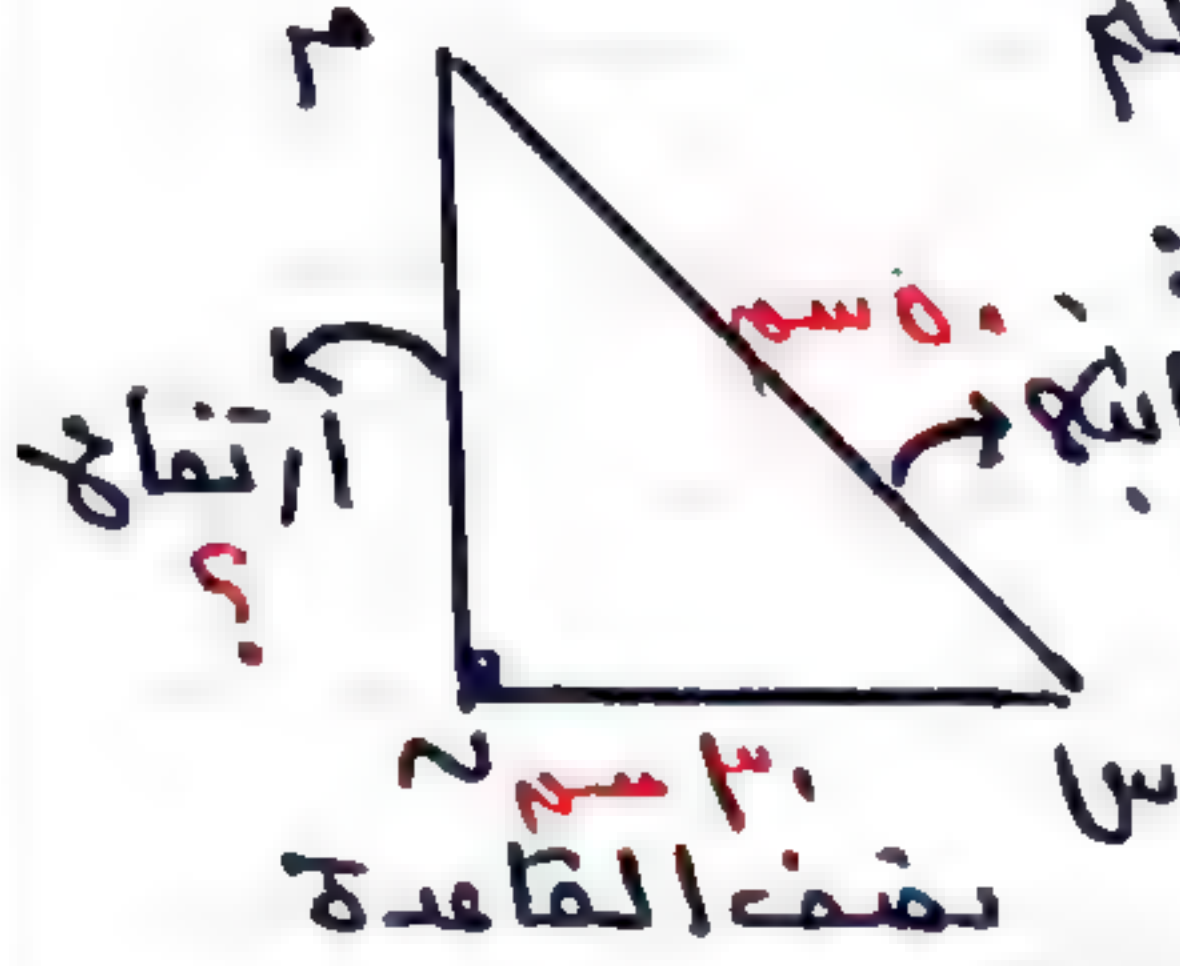
١٩) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه الجانبي ٥ سم أوجد

- ارتفاع الهرم
- المساحة الجانبي والكلية للهرم
- حجم الهرم

الحل

الهرم رباعي منتظم

يعني قاعدته مربعة:



$$23 = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = 4 \text{ سم}$$

وهو ارتفاع الهرم

■ المساحة الجانبي

$$\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي} = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60 \text{ سم}^2$$

■ المساحة الكلية

$$= \text{الجانبي} + \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 60 + (6 \times 6) = 96 \text{ سم}^2$$

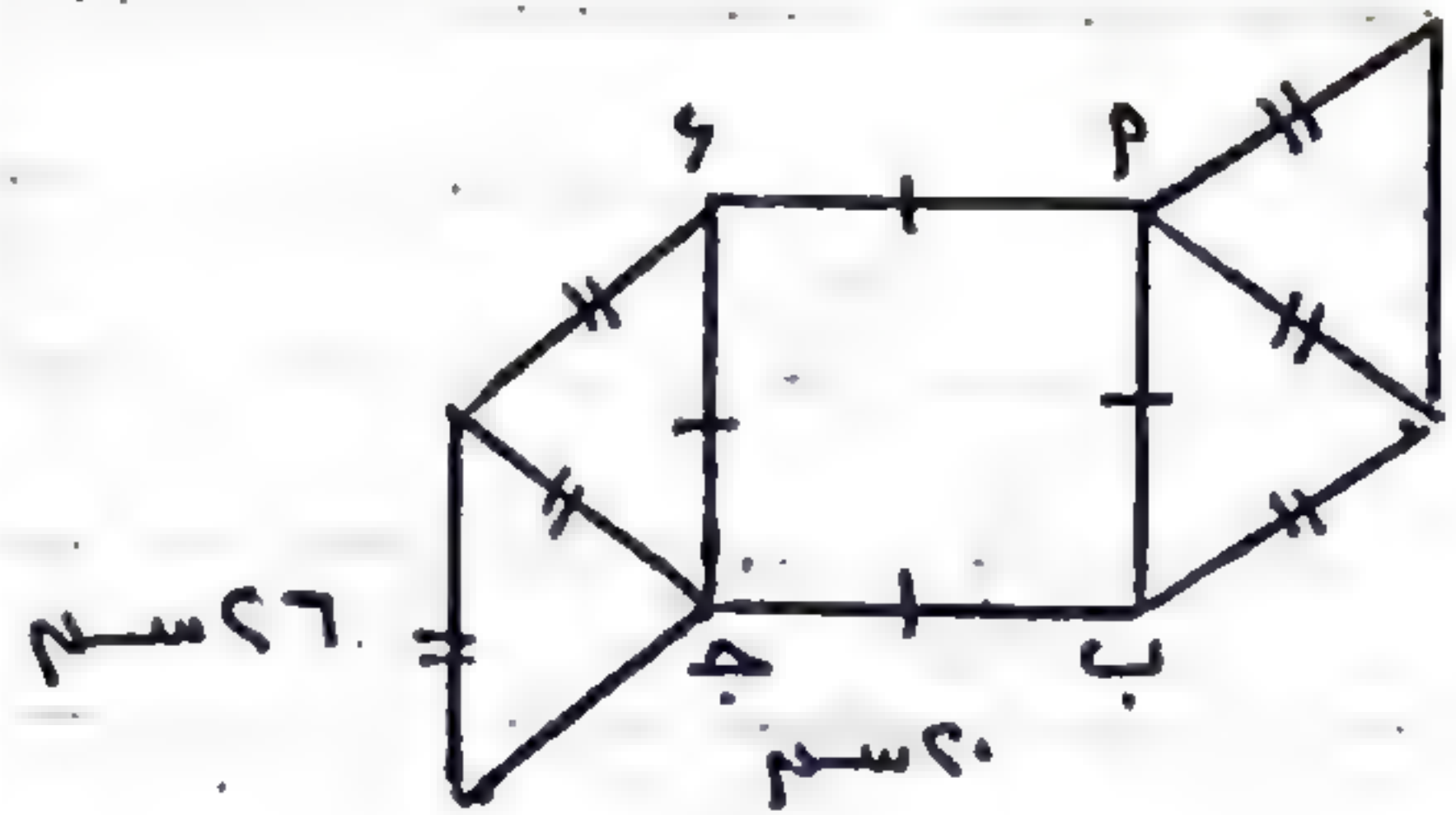
■ الحجم

$$= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 4 = 48 \text{ سم}^3$$

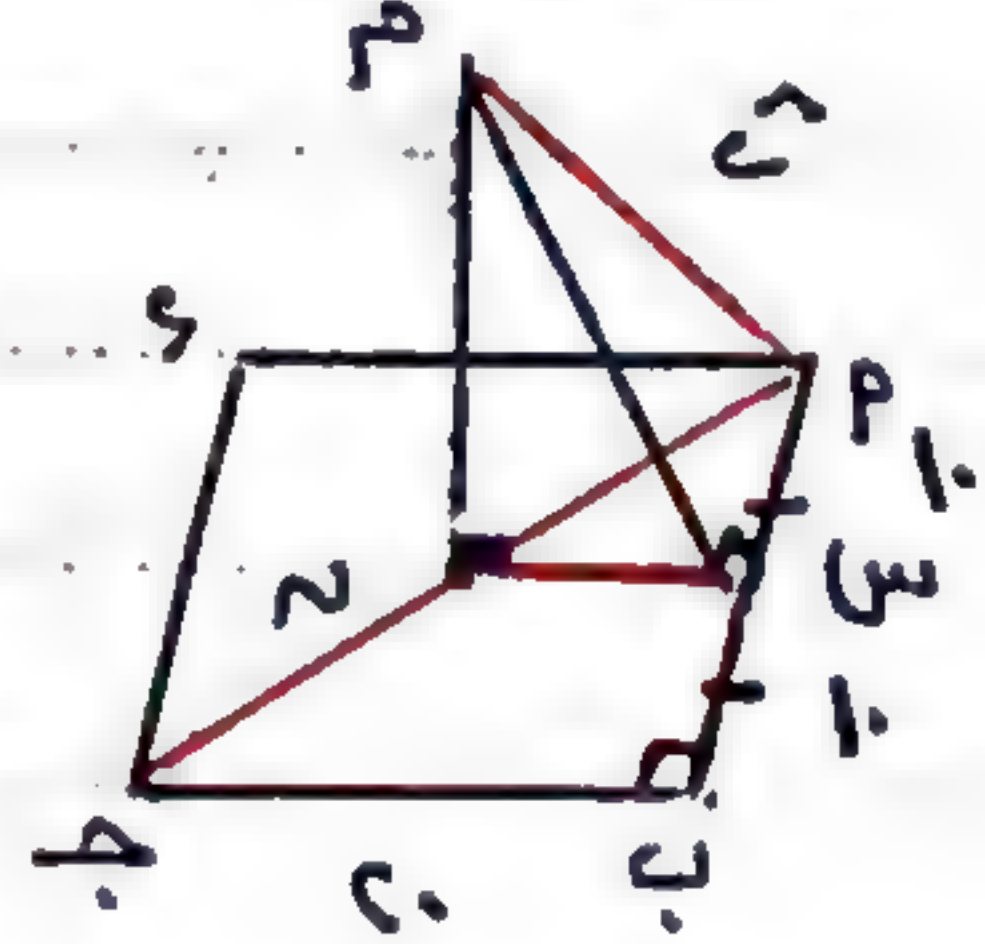
١٨) في الشكل التالي شبكة لهرم رباعي منتظم أوجد:

- ارتفاع الهرم
- الارتفاع الجانبي



الحل

نجد الشكل أولاً



■ P ب د قائم كـ ب

$$P = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = 5.6 \text{ سم}$$

$$P = 5.6 \text{ سم} : 23 = \sqrt{(5.6)^2 - (2)^2} = 5.1 \text{ سم}$$

نخلص بالـ (P = 5.6 سم) $\frac{1}{2} \times P \times 4 = 11.2 \text{ سم}$

■ P ب ج (س مستقيم P ب ك مستقيم P ج ك)

∴ س ن = 10 سم

■ P س ن = 2

$$P = 3.1 = \sqrt{(10)^2 + (2)^2} = 10.2 \text{ سم}$$

٢٠ هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨ سم^٣
 وحلول مثلث قاعدته اسم أو حيد
 مساحته الكلية ؟

الحل

حجم الهرم

$$= \frac{1}{3} \text{ مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

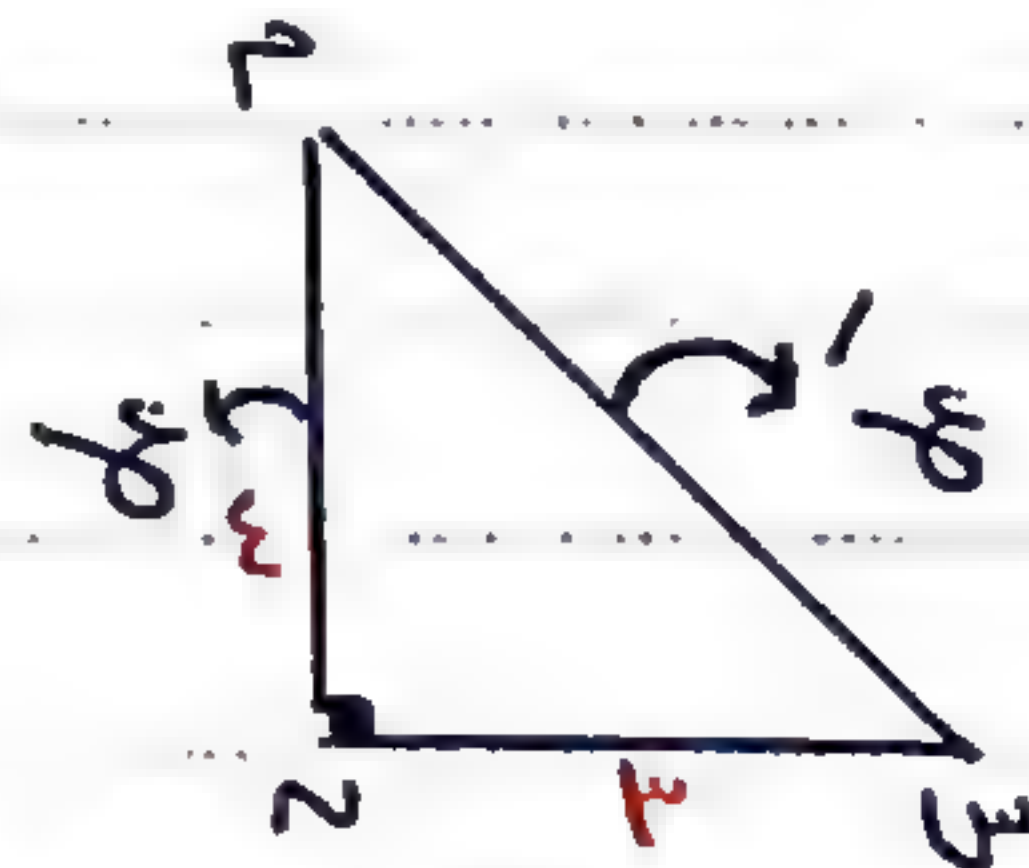
$$\therefore 48 = \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times \text{ح}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{48}{12} = 4 \text{ سم}$$

المساحة الكلية

$$= \text{الجانبية} + \text{مساحة القاعدة}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي} + \text{مساحة القاعدة}$$

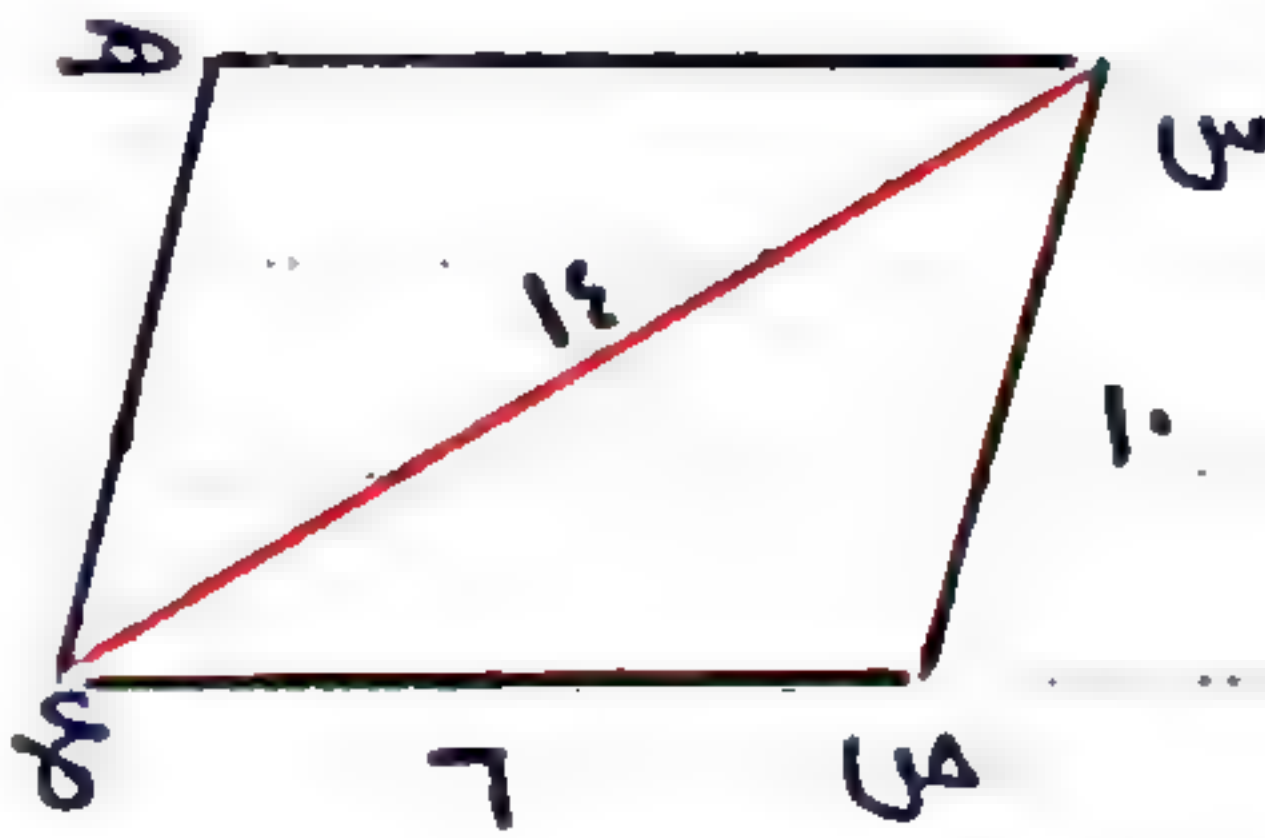


$$\text{ع}' (\text{الجانبي}) = \sqrt{6^2 + 4^2} = 5 \text{ سم}$$

المساحة الكلية

$$= \frac{1}{2} \times (6 \times 6) + 5 \times (6 \times 4) = 96 \text{ سم}^2$$

٢١ س من ح هـ هرم رباعي قائم
 قاعدته على شكل متوازي أضلاع فيه
 س من = ١٠ سم ، من ح = ٦ سم ،
 س ح = ١٢ سم فانا كان ارتفاع الهرم
 = ٣٦٤ أو حيد حجم الهرم ؟
 الحل



مساحة متوازي الأضلاع

$$= 2 \times \text{مساحة} \Delta \text{ س من ح}$$

$$= \text{مساحة} \Delta \text{ س من ح}$$

$$= \sqrt{2(2)(2)(2)(10-2)(6-2)(12-2)(12-2)} =$$

$$= \sqrt{2(10)(6)(12)(12)(8)(8)(8)(8)} =$$

$$= 3610 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة المتوازي س من ح هـ} = 3630 \text{ سم}^2$$

حجم الهرم :

$$= \frac{1}{3} \text{ مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

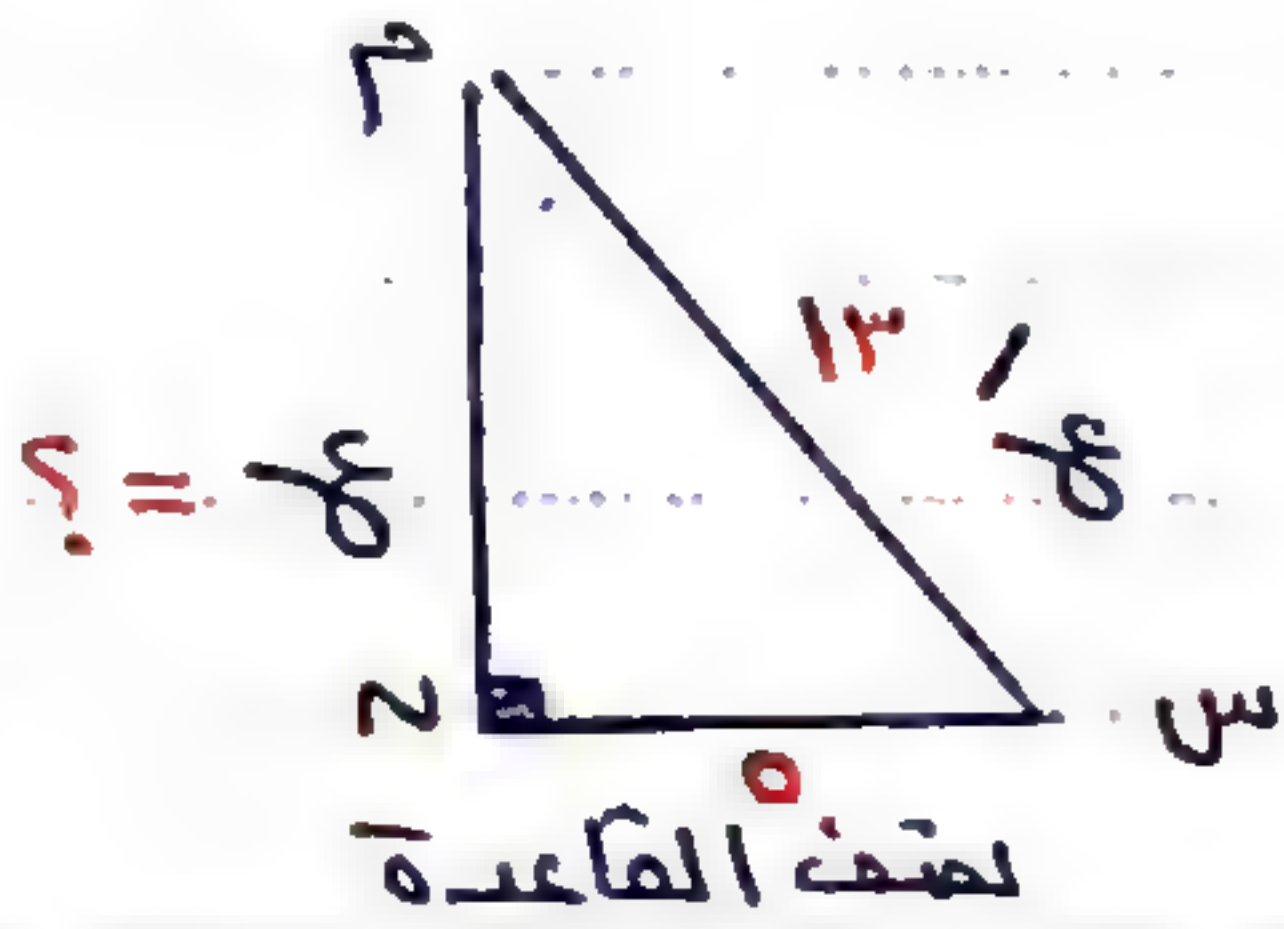
$$= \frac{1}{3} \times 3630 \times 364 = 44100 \text{ سم}^3$$

خط باللك (٦ نصف محيط المثلث)

(٢٣) مساحة الهرم رباعي منتظم
مساحته الكلية ٣٦٠ سم^٢ وارتفاعه
الجانبي ١٣ سم أوجد طول قاعدته
وحجمه ؟

الحل

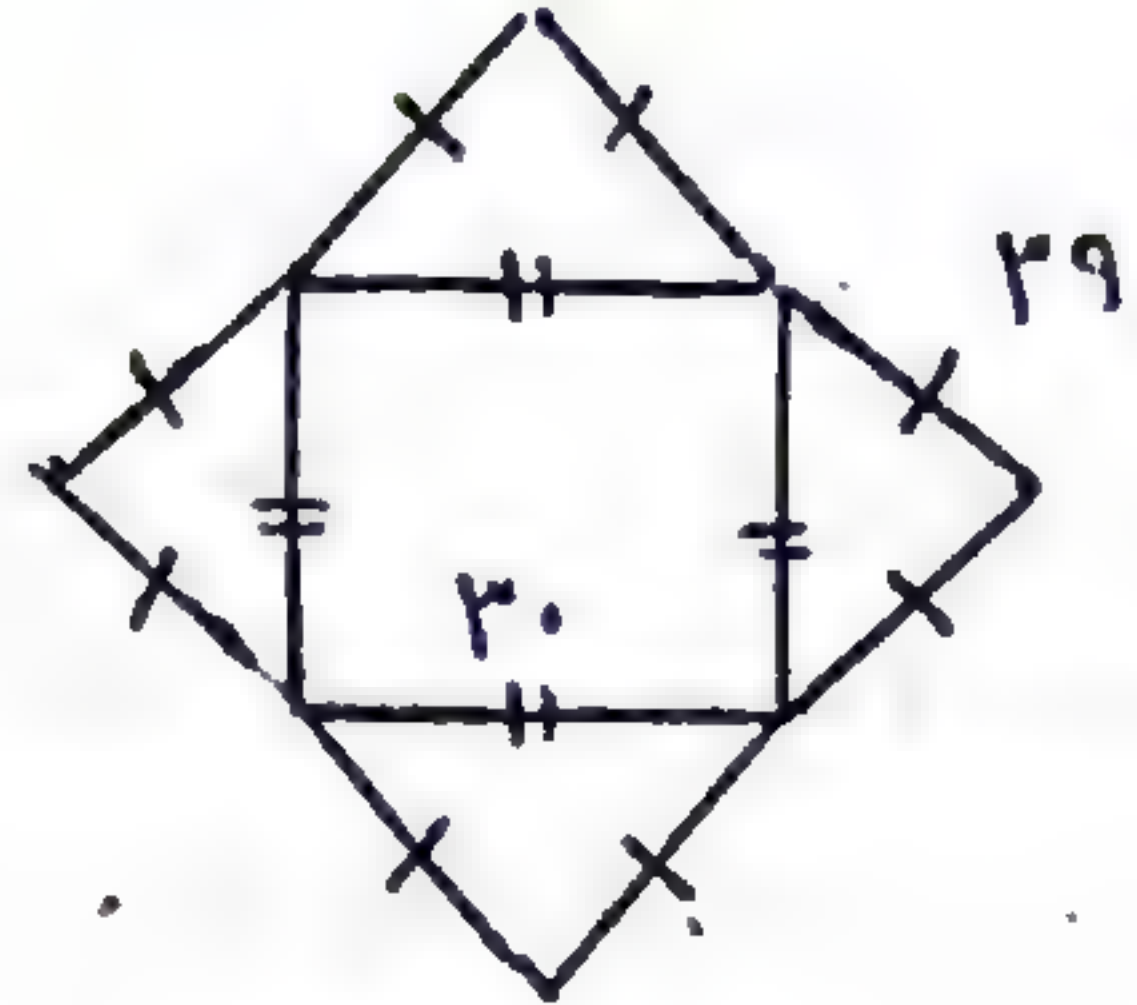
$$\begin{aligned}
 &= \text{المساحة الكلية للهرم} = ٣٦٠ \text{ سم}^2 \\
 &\therefore \text{المساحة الكلية :} \\
 &= \text{الجانبي} + \text{مساحة القاعدة} \\
 &= \frac{1}{3} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي} + \text{مساحة القاعدة} \\
 &= \frac{1}{3} \times 4 \times \text{ل} + 13 \times \frac{1}{3} \times \text{ل} \times \text{ل} \\
 &\therefore 360 = \text{ل}^2 + \frac{4}{3} \times \text{ل}^2 \\
 &= 360 - \text{ل}^2 + \frac{4}{3} \times \text{ل}^2 \\
 &= (360 + \text{ل}^2) (1 - \frac{4}{3}) \\
 &\therefore \text{ل} = 10 \text{ سم} \\
 &\therefore \text{طول القاعدة} = 10 \text{ سم} \quad \#
 \end{aligned}$$



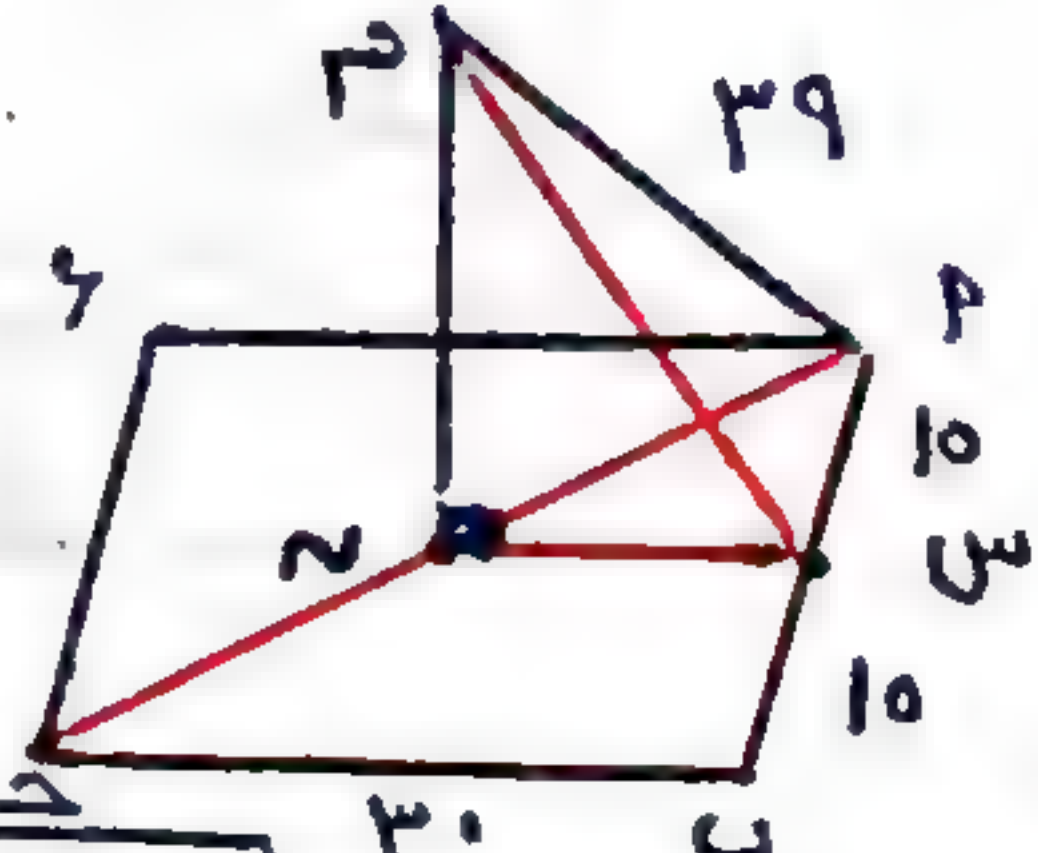
$$\begin{aligned}
 &= \text{ع} (1/2 \text{ ارتفاع الهرم}) = 10 - 196 = 12 \text{ سم} \\
 &= \text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ع} \\
 &= \frac{1}{3} \times (10 \times 10) \times 12 \\
 &= 400 \text{ سم}^3 \quad \#
 \end{aligned}$$

(٢٤) باستخدام الشبكة التالية أوجد
مساحة المحسم الكلية وكذلك حجمه

الحل



الحل



$$\begin{aligned}
 \Delta \text{ ب ج د} : \text{ب} = 30, \text{ج} = 30, \text{د} = 30 \\
 \Delta \text{ ب ج د} : \text{ب} = 30, \text{ج} = 30, \text{د} = 30 \\
 \Delta \text{ ب ج د} : \text{ب} = 30, \text{ج} = 30, \text{د} = 30
 \end{aligned}$$

$$= 1196.3 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ارتفاع الهرم} = 1196.3 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة القاعدة} = 1196.3 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة القاعدة} = 1196.3 \text{ سم}^2$$

$$\Delta \text{ ب ج د} : \text{ب} = 30, \text{ج} = 30, \text{د} = 30$$

$$= 36 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ارتفاع الجانبي} = 36 \text{ سم}$$

$$= \text{المساحة الكلية} = 30.6 \text{ سم}^2 \quad \#$$

$$= \text{الحجم} = 1196.3 \text{ سم}^3 \quad \#$$

حل أنت بالقانون لأنك مش فاحك سلام

٢٣ ب ج هـ هرم ثلاثي قائم كذا

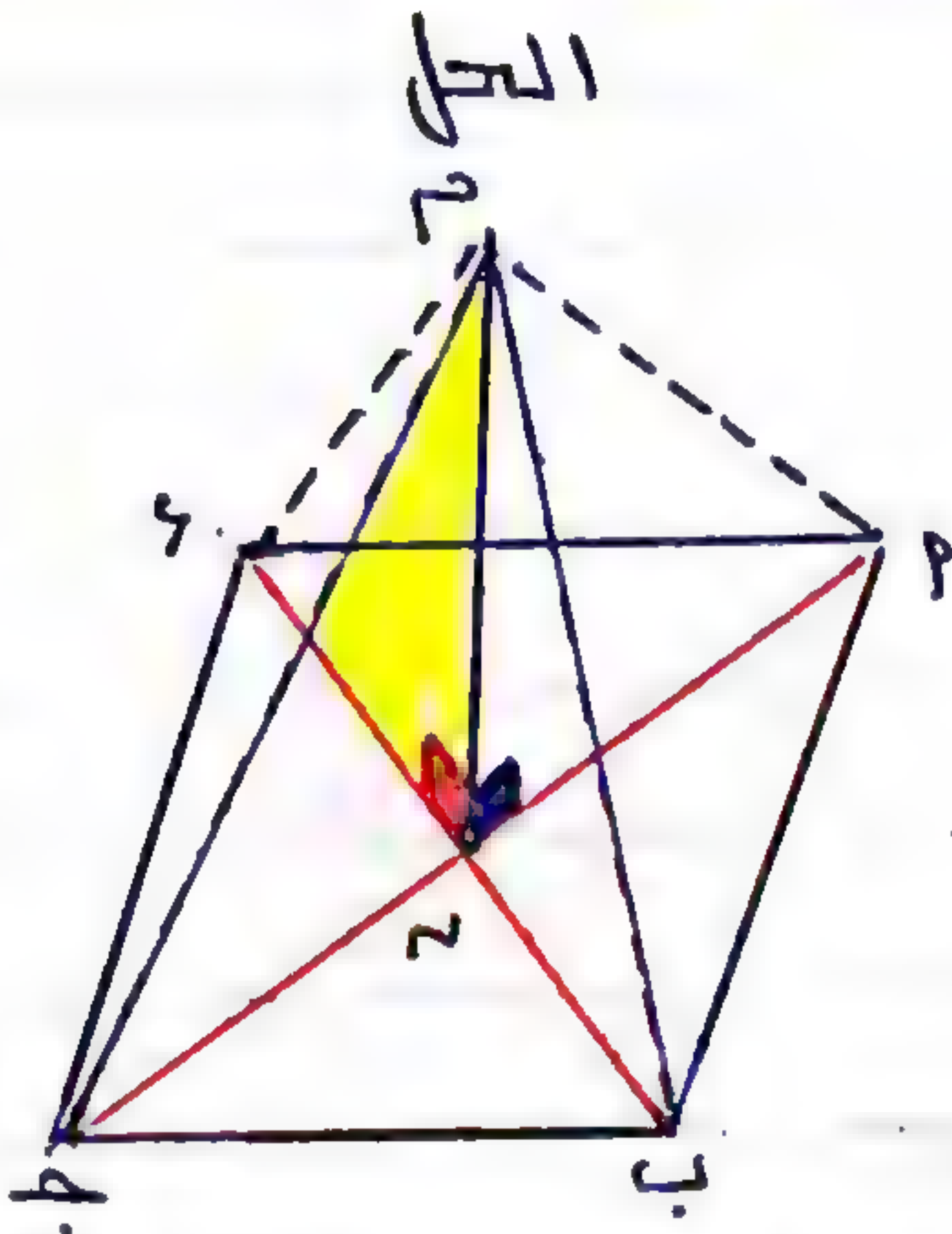
المعين ٢ ب ج هـ ٢ ج ٢ هـ = ١٦ اسم

٢ ب ج هـ = ١٢ اسم ٢ ب ج هـ نقطة تقاطع

قطريه فاذا كان ارتفاع الهرم

٢ هـ = ١٠ اسم فاوجد طول الارتفاع

الجائبة ؟



٢ هـ ٢ ب ج هـ

$$٢ هـ = \sqrt{١٦ + ١٠} = ٢٤$$

٢ هـ ٢ ب ج هـ

$$٢ هـ = \sqrt{١٦ + ١٠} = ٢٤$$

$$٢ هـ = ٢٤ = ٢٤$$

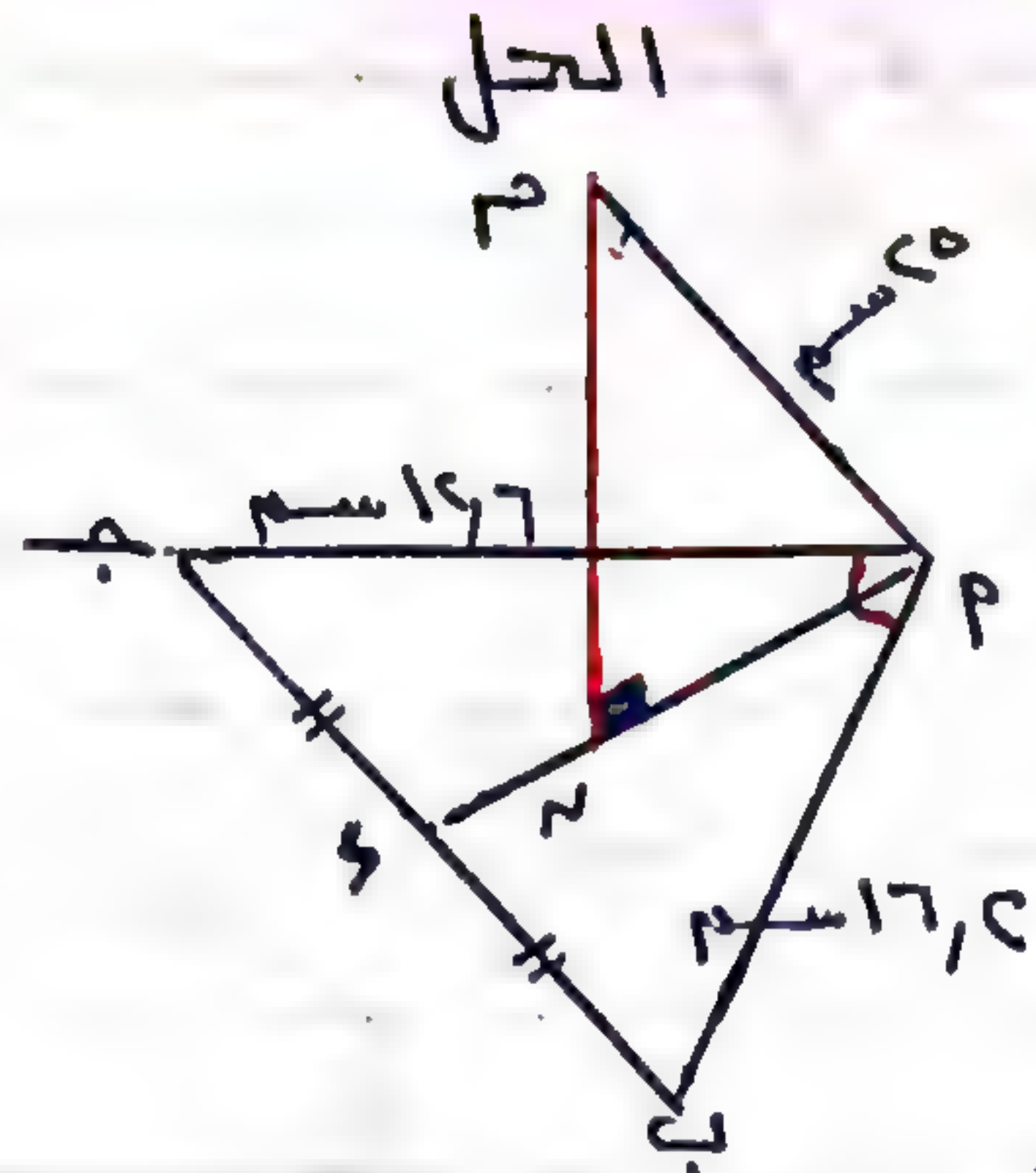
$$\# ٢ هـ = ٢٤ = ٢٤$$

٢٣ ب ج هـ هرم ثلاثي قائم كذا

٢ طول حرفه ٢٥ = ٢٣ اسم

٢ ج هـ = ١٢ اسم ٢ ب ج هـ = ١٦ اسم

أوجد ارتفاعه ؟



$$٢ هـ = \sqrt{١٦ + ١٠} = ٢٤$$

٢٤ اسم

٢ هـ منتصف ب ج هـ

٢ هـ متوسط خارجي من رأس القائمة

٢ هـ القائمة ٢ ب ج هـ القائمة ٢

$$٢ هـ = \frac{١}{٢} \times ٢٤ = ١٢$$

$$١٠,٥ = ١٠,٥$$

$$٢ هـ = ١٠,٥ \times \frac{٢}{٣} = ٧$$

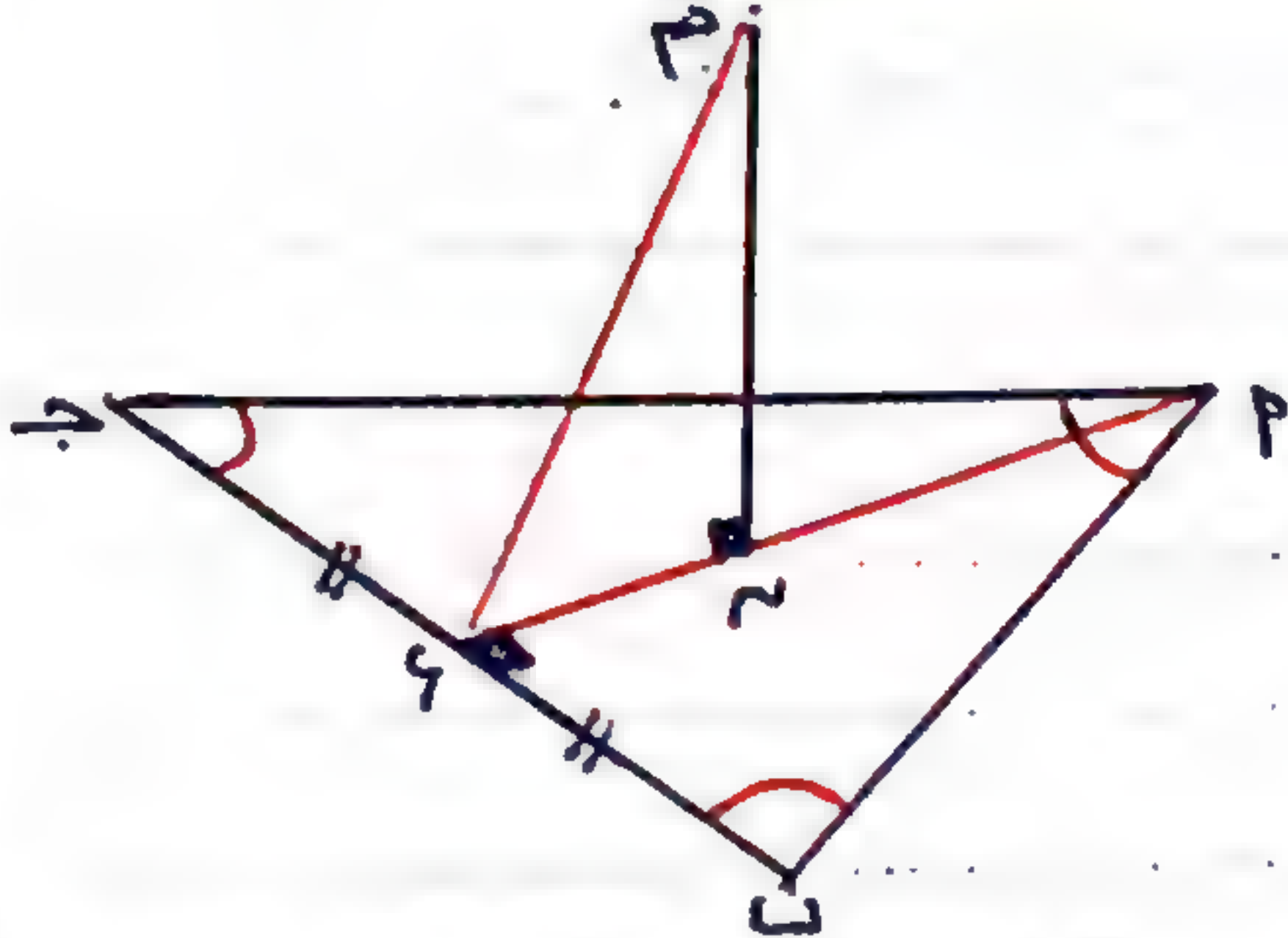
٢ هـ ٢ ب ج هـ

$$٢ هـ = \sqrt{١٦ - ١٠} = ٢٤$$

وهو ارتفاع الهرم

(٥٧) ار جب حجم هرم ثلاثي منتظم
ارتفاعه الجانبية ١٠ اسم وقاعدته
مربعة داخل دائرة طول نصف
قطرها ١٢ اسم ؟

الحل



Δ ABC متساوي الأضلاع لأنه قال منتظم

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

من قاعدة الجيب :

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ} \Rightarrow 10 = 12 \Rightarrow \text{خطأ}$$

٦. منتصف BC : $\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$

$$\Delta ABC : \angle A = 60^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 60^\circ$$

$$= 180^\circ$$

$$60^\circ \text{ متوسط } \leftarrow \therefore \angle A = 120^\circ$$

$$\Delta ABC : \angle A = 120^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 60^\circ$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع}$$

$$\therefore \text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 6 \times 10 = 120$$

(٥٦) هرم رباعي منتظم قاعدته مربعة
طول قطريه ٨ سم ٤ سم وارتفاعه
يساوي ١٢ اسم ٦ اسم ٤ اسم ٨ اسم
يساوي حجم مكعبه طول حرفه ٤ سم ؟

الحل

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times [4 \times 4 \times \frac{1}{2}] \times 12$$

$$= 64 \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم المكعب} = 4 \times 4 \times 4$$

$$= 64 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{حجم الهرم} = \text{حجم المكعب} \quad \#$$

٢٩) هرم رباعي منتظم حجمه ١١٨ سم^٣
والارتفاع ١٢ اسم احسب مساحته
الجايبة ؟

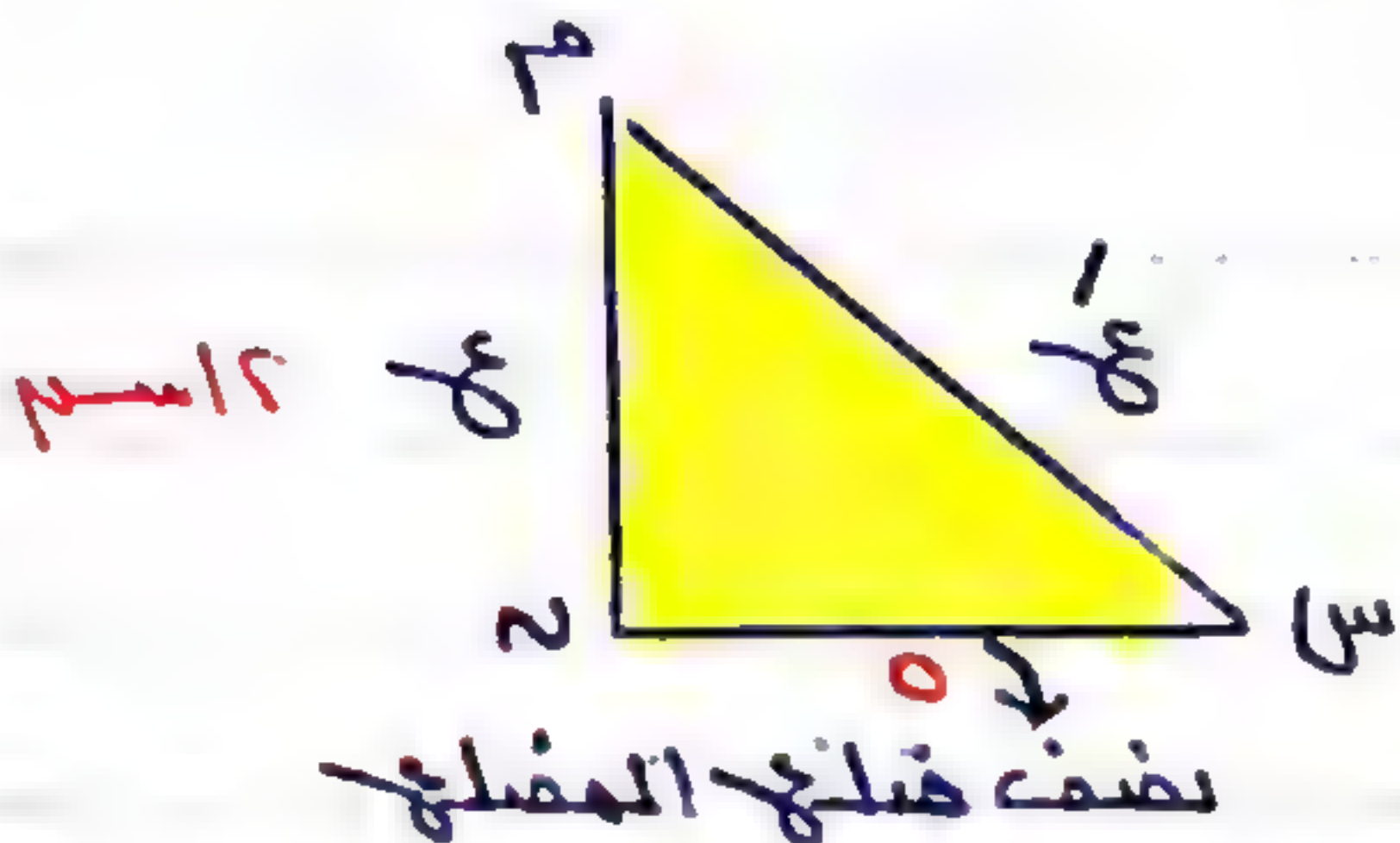
الحل

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$12 \times 3 \times \frac{1}{3} = 12$$

$$p_{\text{max}} = p \therefore$$

$$\mu_k = \sqrt{k} = 1 \therefore$$



8. (الجانب) = $\sqrt{144 + 25} = 13$ سم

■ المساحة الجاسية

$\frac{1}{r} =$ محيط القاعدة \times الارتفاع $\div 3$

$$13 \times (2 \times 10) \times \frac{1}{7} =$$

$c_{nm57.} =$

فاک ۱۰۰

प्रायः यथा किं तस्य

$$\left(\frac{1}{2}\right) \text{ فكتا } \rho_{ss} \approx \frac{1}{2} =$$

حيث: $N \leftarrow$ عدد الأطفال $\dots \dots \dots 7 =$

س ← طول المثلث = ٨

حجم المثلث

$$= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$1 \cdot x \cdot \frac{1}{2015} \cdot x (\wedge x \wedge) x \neg \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{4} =$$

... $\mu_{\text{mean}} = 0.5, 50 =$

لوحد فاک قانون مساحتہ ایضاً مضامین
مستظم کتا عدلنا حینہ علیسان محدث بنزل:

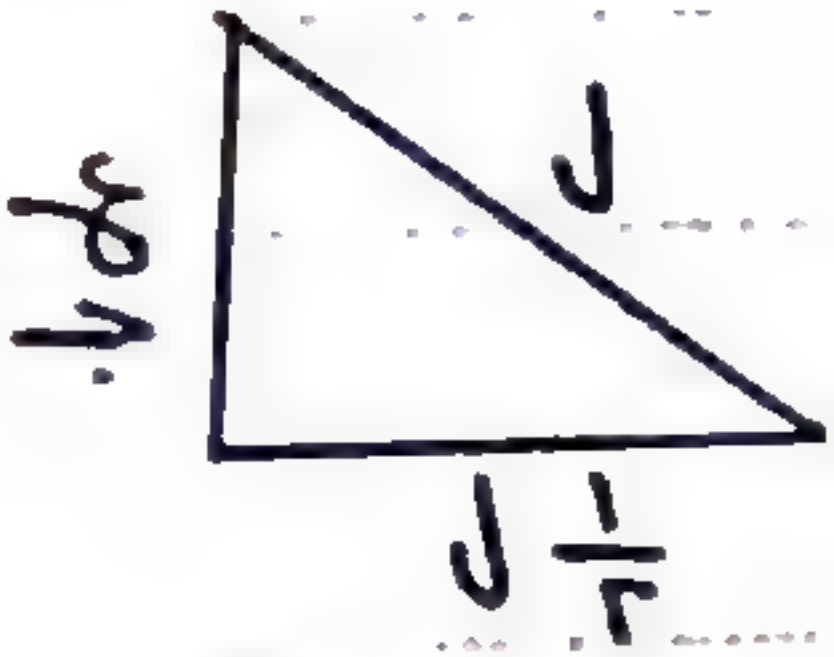
$$\left(\frac{1\lambda}{2} - 9.0\right) \times 10^9 \times \frac{2}{\lambda} = 10$$

٣١) هرم قائم قاعدته مربعة وجميع
أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية
تساوي $4(1 + \sqrt{3})$ ؟ أوجد طول حرفه
بذلالة ؟

الحل

نكن قاله أحرفه الثمانية متساوية وبمعناه
ان طول مناسج القاعدة = طول أله حرف
من أحرفه الجائسة .

نفر من : طول مناسج القاعدة = طول الحرف
الجائس يساوي ل



من المثلث المقابل :

$$\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{ل}{٢}\right)^2 - (ل)^2} = \frac{ل}{٢}$$

المساحة الكلية = الجائسة + مساحة القاعدة

$$ل + ل \frac{\sqrt{3}}{٢} \times (ل) \times \frac{١}{٢} = 4(1 + \sqrt{3})$$

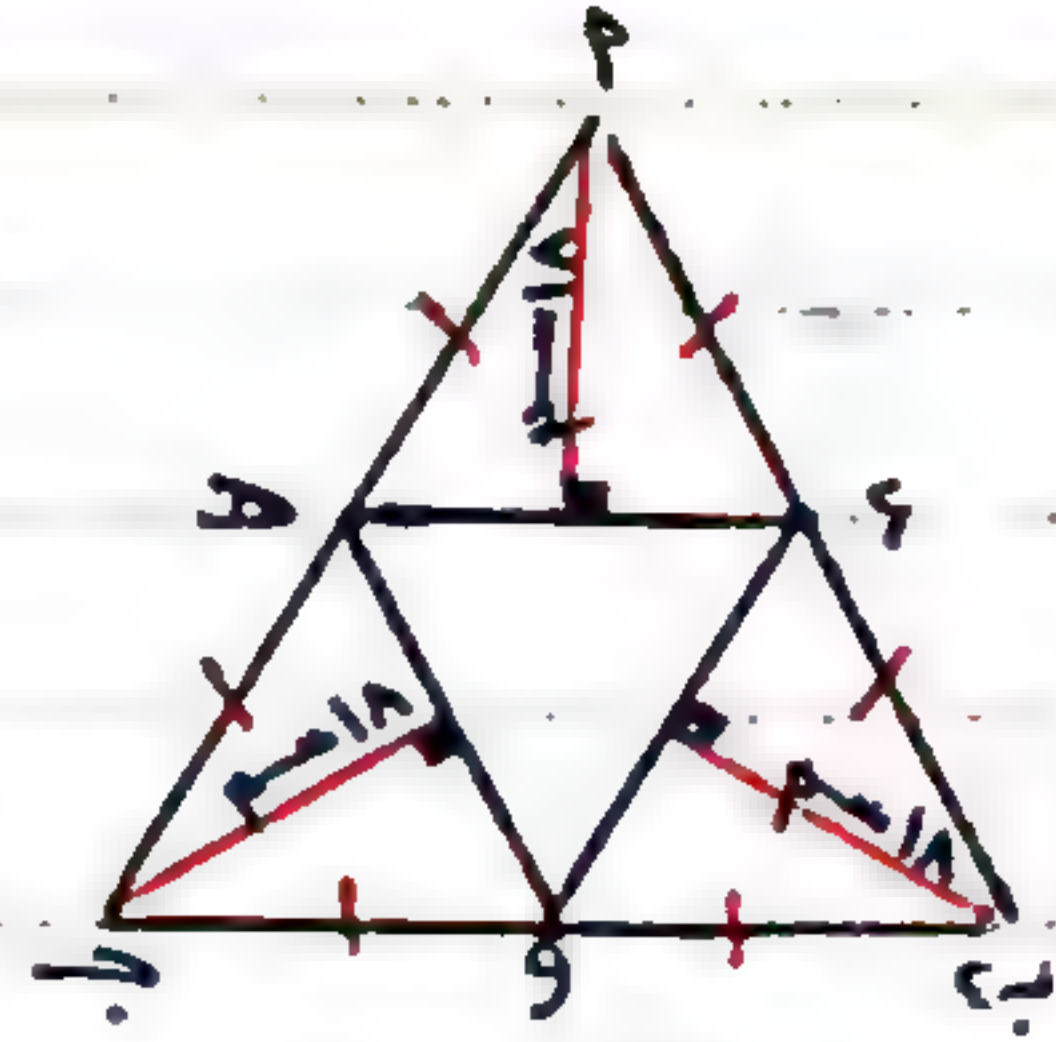
$$ل + ل \sqrt{3} = 4(1 + \sqrt{3})$$

$$(1 + \sqrt{3}) ل = 4(1 + \sqrt{3})$$

$$ل = 4$$

$$\# \sqrt{3} = ل$$

٣٠) باستخدام الشبكة التي أمامك
صف المحسوس وأوجد مساحته الكلية؟



الحل

$$هـ = \frac{١}{٢} ب د = و = \frac{١}{٢} د ب = ز = \frac{١}{٢} ب د$$

$$\therefore ب د = د ب = ب د$$

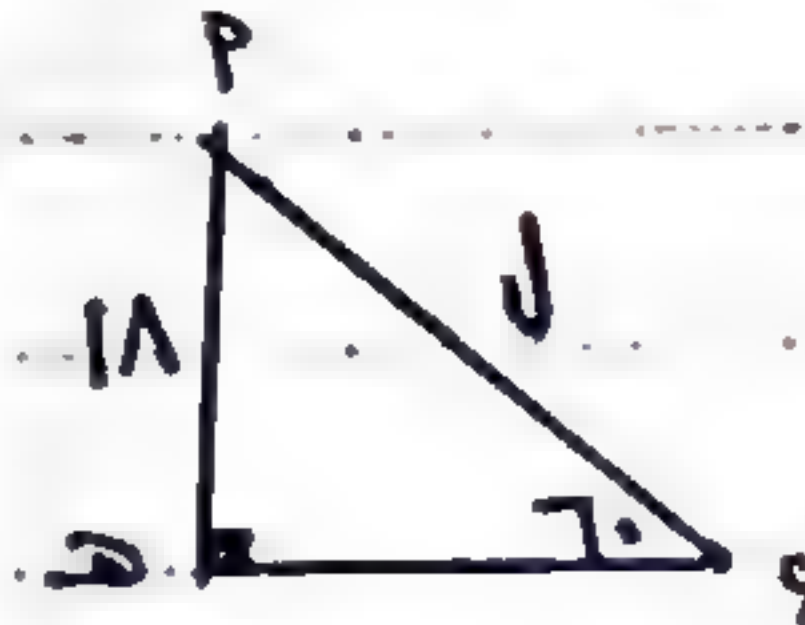
$$\therefore هـ = و = ز$$

الهرم ثلاثي متشظم الوجوه .

$$\text{نفر من : } ب د = د ب = ب د = ز$$

$$\therefore \triangle هـ ب د \text{ متساوي الأضلاع}$$

$$\therefore هـ ب د = هـ د = د ب$$



$$\text{ح.ا.} = \frac{ل}{٢} \leftarrow \frac{ل}{٢} = ل \therefore \frac{ل}{٢} = ل \therefore ل = ٢$$

المساحة الكلية = $٤ \times$ مساحة أله وجه

$$\leftarrow = ٤ \times \frac{١}{٢} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times ٢ = ٦$$

$$= ٦ \sqrt{3} \text{ سم}^2 \#$$

(٣٣) النسبة بين حجم الهرم الثلاثي المنتظم وحجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي :

الحل

$$\pi : 3\sqrt{3}$$

(٣٤) م ٢ ب ج هرم ثلاثي (أسه م على بُعد ٥٧٤ من قاعدته ٢ ب ج وحيث ٢ ب = ٧ سم ٢ ب ج = ٨ سم ٢ ج = ٩ سم د أو ج ب حجم الهرم؟

الحل

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times ع

$$\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{4} (2-2) (2-2) (2-2)} \times 574$$

حيث ٢ = $\frac{1}{2}$ (محيط المثلث ٢ ب ج)

$$\frac{1}{4} \times (7+8+9) = 12 \text{ سم}$$

$$\text{الحجم} = \sqrt{\frac{1}{4} (9-12) (8-12) (7-12)} \times 574$$

$$= 10 \text{ سم}^3$$

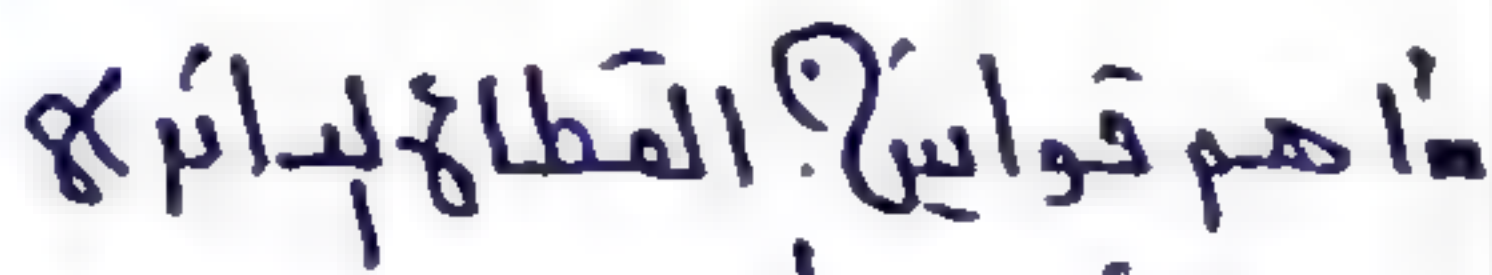
(٣٤) النسبة بين حجم الهرم الثلاثي المنتظم وحجم أصغر مخروط دائري قائم يحتويه تساوي :

الحل

$$\pi : 3\sqrt{3}$$

المطالع الدائم :

- هو جزء من سطح الدائرة محدد بنصف قطرين وقوس من الدائرة



بـ دوران مثبات قائم الزاوية دواة كاملة
حول أحد مناسخ القائمة .

← طبع و رقعة على شكل قطاع - انظر ٨.



ل = $\frac{\pi \times \frac{360}{\pi} \times \frac{1}{2}}$
ل = طول القوس

خالق بالله:

هـ ← زاوية المقاطع بالتقدير الدائري (المركزية)
س ← زاوية المقاطع بالتقدير السيني (المركزية)

$$\sqrt{+2.5} = \dots$$

لأنها لومحيطية. تنقص بها ٢٨. وذلك

لذلك: قياس المركزية = $r \times$ المحيطية

المشركة مع
فوتيس القوس

٤ ← ارتفاع المخروط

لـ ← الرابع

مع ← نصف قطر قاعدة المخروط.

$$\sqrt{s_{\text{rel}} - s_j} = \delta \quad \leftarrow$$

عقل الخرد $\leftarrow \sqrt{c_{\text{ref}} + c_f} = 1 \leftarrow$

$$\vec{c} - \vec{d} = \vec{a} \quad \leftarrow$$

$$J > 0.$$

← المساحة الجائبة واللكية والحجم
للمخروط الدائر القائم.

← المساحة الجائبة = $\pi r l$

← المساحة اللكية = $\pi r^2 + \pi r l$

← $\pi r^2 = \pi r (r + l)$

← الحجم = $\frac{1}{3} \pi r^2 l$

← حماده ركن في الحاجات:

← لتحويل من القياس:

← السيف الم الدائر:

$$\theta^\circ = \frac{\pi \times 180}{3.14} \quad (\pi = 3.14)$$

← الدائر الم السيف:

$$\theta^\circ = \frac{180 \times \pi}{3.14} \quad (\pi = 3.14)$$

← لتحويل من قطاع دائر الم مخروط

← $r =$ (المقطع) = l (راسم المخروط)

← $l =$ (طول قوس المقطع) = $2\pi r$

حيث $(2\pi r)$ محيط قاعدة المخروط

← إذا كان:

← $l < r$ فإن $0 < 180$

← $l = r$ فإن $180 = 0$

← $l > r$ فإن $180 > 0 > 360$

حيث l ← راسم المخروط

← المخروط البائر القائم هو أيضاً مجسم

ناتج عن دوران مثلث متساوي الساقين

نصف دورة حول محور متانله.

← برنس وانت يتحول المقطع الم مخروط

لما تحسب طول قوس المقطع بسببه بدلالة

π لذلك متطير جامع π تناعة محيط

دائرة المخروط.

③ مخروط دائري قائم قائم مساحته قاعدته
 25π سم^٢، طول راسمه ٣ سم، أوجد
 مساحته الجانبيه والكتيه والحجم؟

الحل

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \text{ سم}^2$$

$$25\pi = \pi \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{سم} = \text{سم}$$

$$\text{سم} = \sqrt{(113) - (5)} = 10 \text{ سم}$$

$$\text{سم} = \frac{\pi \times \text{سم}}{2} = \frac{\pi \times 10}{2} = 5\pi \text{ سم}$$

$$5\pi \times 10 = 50\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{سم} = 25\pi + 50\pi = 75\pi \text{ سم}^2$$

$$90\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{سم}^2 \times 10$$

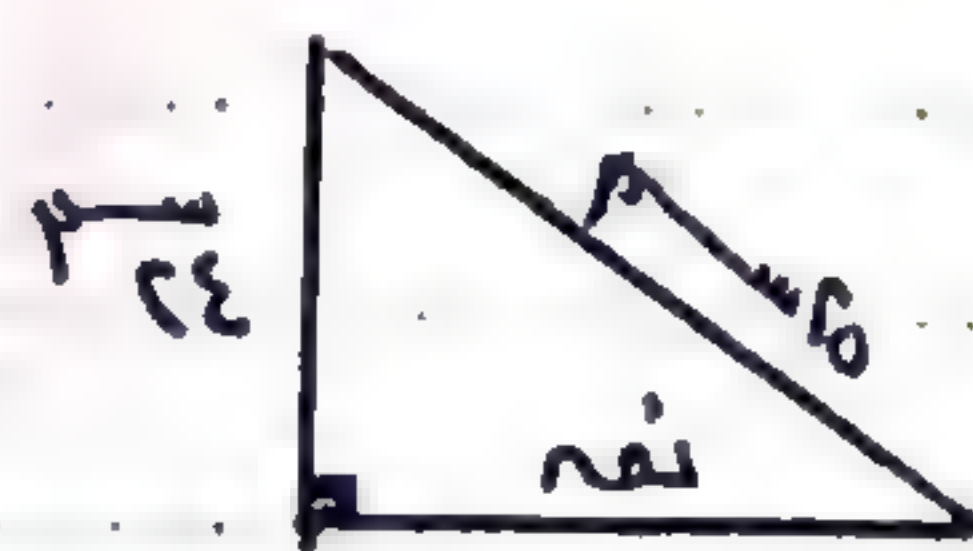
$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 10 \times 10$$

$$= 111\pi \text{ سم}^3 \quad \#$$

*** تقارباً محاكولة ***

① مخروط دائري قائم طول راسمه ٥ سم
 وارتفاعه ٤ سم، أوجد محيط ومساحة
 قاعدة المخروط؟

الحل



$$ل = 5 \text{ سم}$$

$$ع = 4 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سم} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = 3 \text{ سم}$$

$$\text{محيط القاعدة} = 2\pi \times \text{سم} = 2\pi \times 3 = 6\pi \text{ سم}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \times \text{سم}^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ سم}^2$$

② مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته

٢ سم وارتفاعه ٨ سم، أوجد مساحته
 الجانبيه والكتيه والحجم؟

الحل

$$\text{المقطر} = 2 \text{ سم} \therefore \text{سم} = 1 \text{ سم}$$

$$ع = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore ل = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65} \text{ سم}$$

$$\text{سم} = \frac{\pi \times \text{سم}}{2} = \frac{\pi \times 65}{2} = 32.5\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{سم} = 32.5\pi + 32.5\pi = 65\pi \text{ سم}^2$$

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times 32.5 \times 8 = 866.67\pi \text{ سم}^3$$

المخروط :

$$\begin{aligned} \text{ل (للمخروط)} &= \text{ل (للمخروط)} \\ \therefore \text{ل} &= ١٠ \text{ سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ل (للمخروط)} &= \pi r = \pi \times ٢ \\ \pi \times ٢ &= \pi \times ٥ \\ \therefore \text{ل} &= ٢,٥ \text{ سم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ل (للمخروط)} &= \frac{\sqrt{(٢,٥)^2 - ١٠^2}}{1} = \sqrt{١٠^2 - (٢,٥)^2} \\ &= ٩,٦٨ \text{ سم} \end{aligned}$$

٤) دوار مخروط الشكل سميته

٦,١٦ لتر ، ارتفاعه ٢٠ سم أو حبه

طول نصف قطر قاعدته حيث $(\frac{٤٤}{٧} = \pi)$

الحل

$$\text{حجم الدوار} = ٦,١٦ \times ١٠٠٠ = ٦١٦٠ \text{ سم}^٣$$

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \text{نصفه} \times \text{ع}$$

$$٦١٦٠ = \frac{1}{3} \pi \times ٢٠^2 \times \text{نصفه} \times \text{ع}$$

$$٦١٦٠ = \frac{1}{3} \times \frac{٤٤}{٧} \times ٢٠^2 \times \text{نصفه} \times \text{ع}$$

$$\therefore \text{ل} = ١٤ \text{ سم} \quad \#$$

٥) قطاع دائري مساحته $\pi ٢٥$ سم^٢

وقياس زاويته المركزيه = ٩٠° تحول

الى مخروط دائري قائم اوجد ارتفاعه

الحل

المقطع :

$$\text{المساحة} = \frac{\pi r^2}{360} \times \text{نصفه} \times \text{ع}$$

$$\pi ٢٥ = \frac{\pi \times ٩٠}{360} \times \text{ل} \times \text{ع}$$

$$\text{ل} = ١٠ \quad \therefore \text{ل} = ١٠ \text{ سم}$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{ع}$$

$$١٠ \times \text{ل} \times \frac{1}{2} = \pi ٢٥$$

$$\therefore \text{ل} = ٥ \text{ سم}$$

⑥ مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم أوجد كلًا من:

- المساحة الجانبة.
- المساحة الكلية.
- الحجم.

الحل

$$ع = ٢٥ \text{ سم} \quad محيط القاعدة = ٤٤ \text{ سم}$$

$$ل = ؟ \quad ر = ؟$$

$$محيط القاعدة = ٢\pi ر = ٤٤$$

$$٤٤ = ٢\pi ر = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ر$$

$$\therefore ر = ٧ \text{ سم} \quad \sqrt{ع^2 + ر^2} = \sqrt{٢٥^2 + ٧^2} = ل$$

$$\therefore ل = ٢٦$$

المساحة الجانبة:

$$\pi ر ل = \pi \times ٧ \times ٢٦ = ٥٧٢ \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية:

$$= الجانبة + \pi ر^2 = ٥٧٢ + \pi \times ٧^2 = ٦٩٦ \text{ سم}^2$$

الحجم:

$$= \frac{1}{3} \pi ر^2 ع = \frac{1}{3} \times \pi \times ٧^2 \times ٢٥ = ٣٨٥٠ \text{ سم}^3$$

⑦ أوجد طول نصف قطر مخروط

دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦ سم^٢

وطول راسمه ٣٠ سم ؟

الحل

$$ل = ٣٠ \text{ سم}$$

$$المساحة الكلية = ٦١٦ \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية:

$$\pi ر ل + \pi ر^2 =$$

$$\pi ر (ل + ر) =$$

$$\pi ر (ل + ر) = ٦١٦$$

$$\therefore ر (ل + ر) = ٦١٦$$

$$ر (٣٠ + ر) = ٦١٦$$

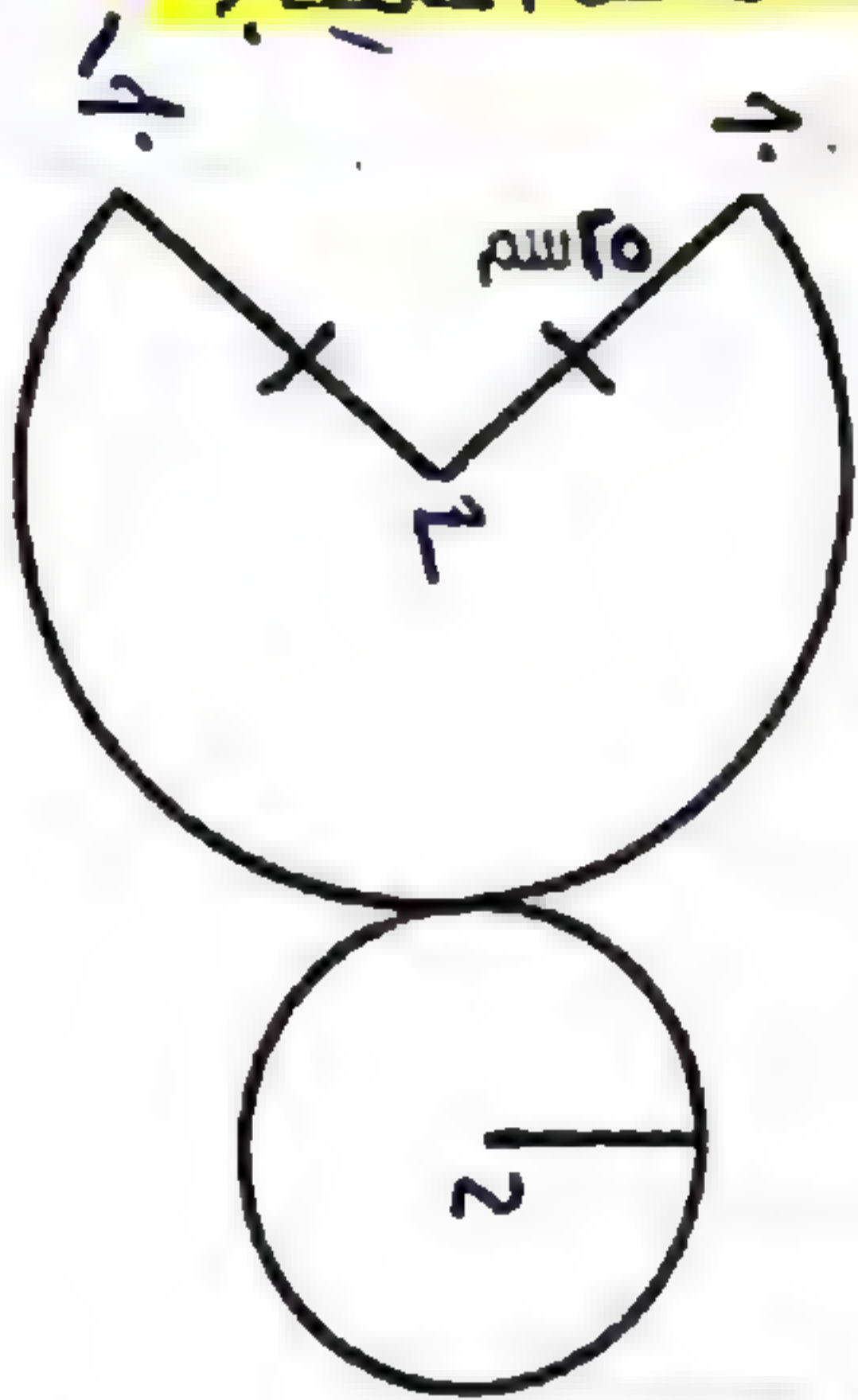
$$\therefore ر = ١٤ \text{ سم}$$

٩) باستخدام الشبكة التي أيا لك

صفت المحسّم وإذا كان طول القوس

حجم = 30π سم، أوجد حجم

المحسّم ومساحة الكلية؟



الحل

فاكر دة :

• ل (المقطع) = 2π سم (لقاعدة المخروط)

$$30\pi = 2\pi \times 10$$

$$\therefore 10 = 15 \text{ سم}$$

• سم (المقطع) = ل (المخروط)

$$\therefore 10 = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore 10 = 20 \text{ سم} \quad \therefore 10 = 20 \text{ سم}$$

• المساحة الجائبة :

$$\pi \times 10 = 10 \times 20 \times \pi = 370\pi \text{ سم}^2$$

• المساحة الكلية :

$$= 370\pi + \pi \times 10$$

$$= 380\pi \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times 10 \times 20 = 100\pi \text{ سم}^3$$

٨) مكعب من السطح طول حرفه

٢٠ سم، صهر وحول الكه مخروط دائري

قائم ارتفاعه ٢٠ سم، أوجد طول نصف

قطر قاعدة المخروط. إذا علم أن ١٢%

من السطح فقد أثناء عملية الصهر

والحويل حسب $(\frac{92}{100} = \pi)$

الحل

$$\text{حجم المكعب} = 20 \times 20 \times 20 = 8000 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{حجم المخروط} = 8000 \times 12\%$$

$$= 960 \text{ سم}^3$$

• الحجم للمخروط :

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$960 = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 20$$

$$\therefore r = 10.58 \text{ سم} \quad \#$$

قريباً
أعو الكمية
أعو الكمية
أعو الكمية
أعو الكمية

① قطع دائري منتظم من الفضة طول قطره ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طولها ولصق نصفها قطره ليكون أكبر مساحة جابسة لمخروط قائم أوجد حجمه؟
الحل

المقطع:

$$\text{نصف} = ١٨ \text{ سم} \quad \text{س} = ٦٠^\circ$$

$$\frac{ل}{نصف} = ٩٠$$

$$\frac{ل}{١٨} = \frac{\pi \times ٦٠}{١٨٠}$$

$$\therefore ل = ٦ \pi \text{ سم}$$

نصف (للمقطع) = ل (للمخروط)

$$\therefore ل = ١٨ \text{ سم} \leftarrow \text{للمخروط}$$

ل (للمقطع) = πr نصف (للمخروط)

$$\pi r = \pi ٦$$

$$\therefore \text{نصف} = ٣ \text{ سم} \leftarrow \text{للمخروط}$$

$$\leftarrow ٣ = \sqrt{(١٨)^2 - (٣)^2} = ١٧.٣ \text{ سم}$$

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \pi \text{ نصف}^2 \times ٣$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times ٩ \times ١٧.٣$$

$$= ١٦٧.٣ \text{ سم}^3 \#$$

حل آخر: كان ممكن بحسب ل مباشرة

$$ل = \frac{٦}{٣} \times \pi \times ١٨ = ٦ \pi$$

① هرم ثمانية منتظم من الفضة طول ضلع قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ٣٠ سم، ضهر وحولها مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٩ سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فقد أثناء الصهر والتحويل أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشري واحد؟

الحل

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة لقاعدة} \times ٦$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times ٦ \times ٦ \times \left(\frac{١٨٠}{٨} \right) \right) \times ٣٠$$

$$= ١٧٣٨.٢ \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم المخروط} = ١٧٣٨.٢ \times ٩٠\%$$

$$= ١٥٦٤.٤ \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \text{ نصف}^2 \times ٦$$

$$١٥٦٤.٤ = \frac{1}{3} \times \pi \times ٨١ \times ٦$$

$$\therefore \text{نصف} = ١٨.٤ \text{ سم} \#$$

١٣) ألبها الأكبر حجماً؟ مخروط قائم
 طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم، وارتفاعه
 ٢٠ سم، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه
 ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم؟

الحل

المخروط:

$$\text{نصف} = ١٥ \text{ سم} \quad \text{ع} = ٢٠ \text{ سم}$$

الحجم:

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (15)^2 \times 20$$

$$= \dots \text{سم}^3$$

الهرم الرباعي المنتظم

$$\text{ع} = ٤٠ \text{ سم} \quad \text{محيط القاعدة} = ٤٨$$

الهرم رباعي منتظم

$$\therefore \text{طول ضلع القاعدة} = \frac{٤٨}{4} = ١٢ \text{ سم}$$

الحجم:

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (12)^2 \times 40$$

$$= \dots \text{سم}^3$$

قارن أنت يقارن بالمعلم #

١٢) طويت قطعة من الورقة المقوية
 على شكل قطاع دائري طول نصف قطره
 دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠°
 ليصنع مخروطاً دائرياً قائماً أوجد
 ارتفاع المخروط وحجمه؟

الحل

القطاع:

$$\text{نصف} = ٣٦ \text{ سم} \quad \text{س} = ٢١٠^\circ$$

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi \times 210}{180} \rightarrow \frac{l}{36} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore l = 84 \pi$$

المخروط

$$\therefore \text{نصف (للمقطع)} = l \text{ (للمخروط)} \quad \therefore l = 84 \pi$$

$$84 \pi = \pi r \quad \therefore r = 84$$

$$\therefore \text{نصف} = ٢١ \text{ سم}$$

$$\text{ع} = \sqrt{(36)^2 - (21)^2} = \sqrt{900 - 441} = \sqrt{459} \text{ سم}$$

الحجم:

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (21)^2 \times \sqrt{459}$$

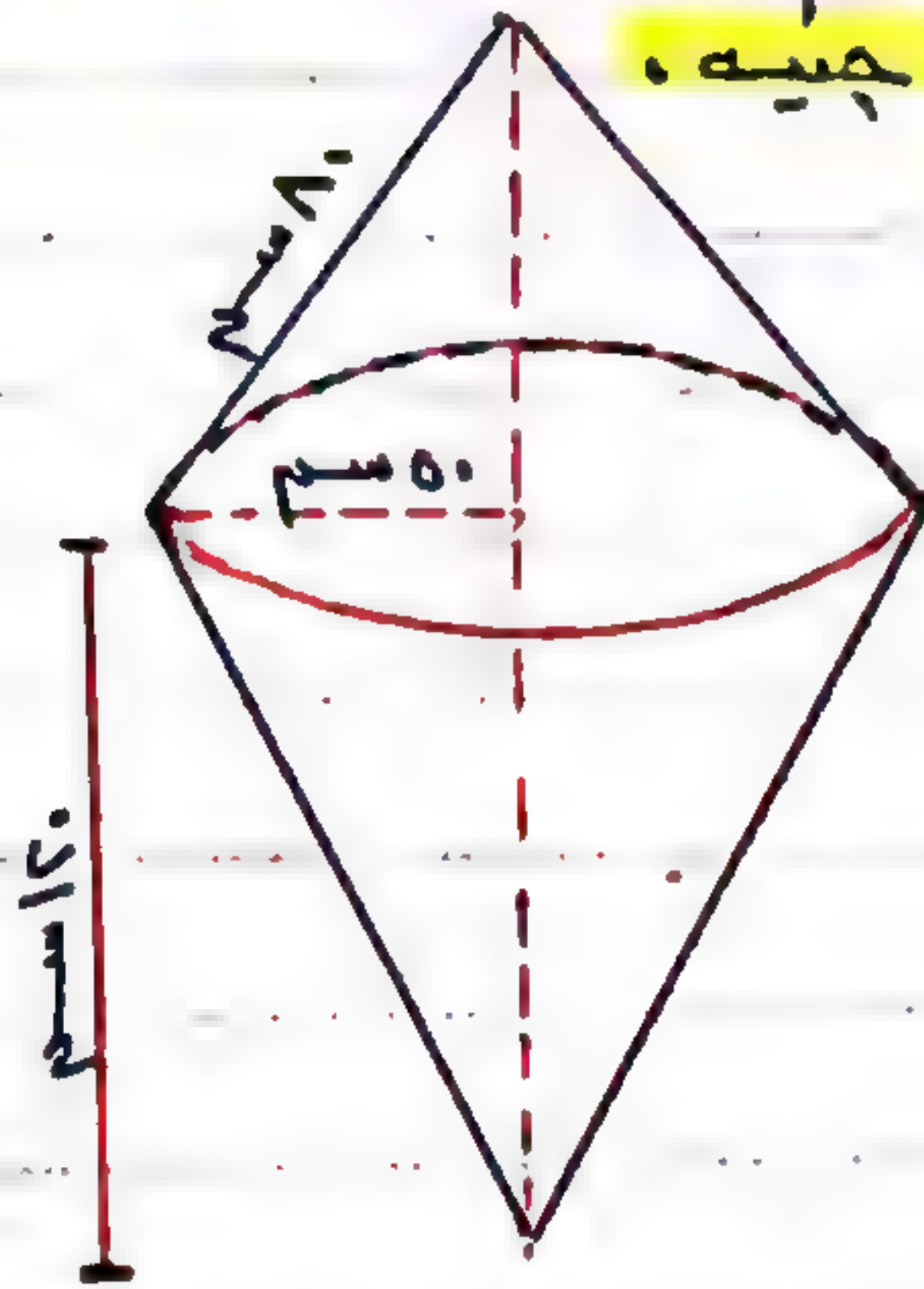
$$\approx 6947 \text{ سم}^3$$

محاور الدوران هو \overleftrightarrow{PO} $\therefore \text{سم } 3 = \text{سم}$
 نصفه = $\text{سم } 4 = \sqrt{9+16} = 5$
 الحجم = $\frac{1}{3} \pi \text{ نصفه}^2 \times \text{سم}$
 $= \frac{1}{3} \pi \times 16 \times 3 =$
 $= 16 \pi$ وحدة مكعبة #

$r_p = 1.17$, $r_o =$

١٦) في الشكل التالي:

استفند وارة) لتحديد الجرم الملاحق
وهو على هيئة مخروطين قائمين
لهما قاعدة مشتركة. أوجد تكاليف
طلائع بمادة مقاومة لعوامل التآكل
علما بأن تكاليف المتر المربع الواحد
منها ٣٠٠ جنيه.



المخروط الأول:

$$\text{نصفه} = ٥٠ \text{ سم} \quad \text{كـ} = ٨٠ = ١٠ \text{ سم}$$

المخروط الثاني:

$$\text{نصفه} = ٥٠ \text{ سم} \quad \text{كـ} = ١٢٠ = ١٢ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{كـ} = ١٢٠ + ١٠ = ٢٠ = ١٢٠ \text{ سم}$$

وكن لا أزم تحول من سم إلى متر

لأنه قال تكاليف المتر المربع.

وعلى أن تحول من سم إلى م. انقسم على ١٠٠

المساحة الجانبي:

$$\pi \cdot ١٠ \cdot ٨٠ + \pi \cdot ١٢ \cdot ١٢٠ =$$

$$= \frac{٨٠}{١٠٠} \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \pi + \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٠٠} \times \pi =$$

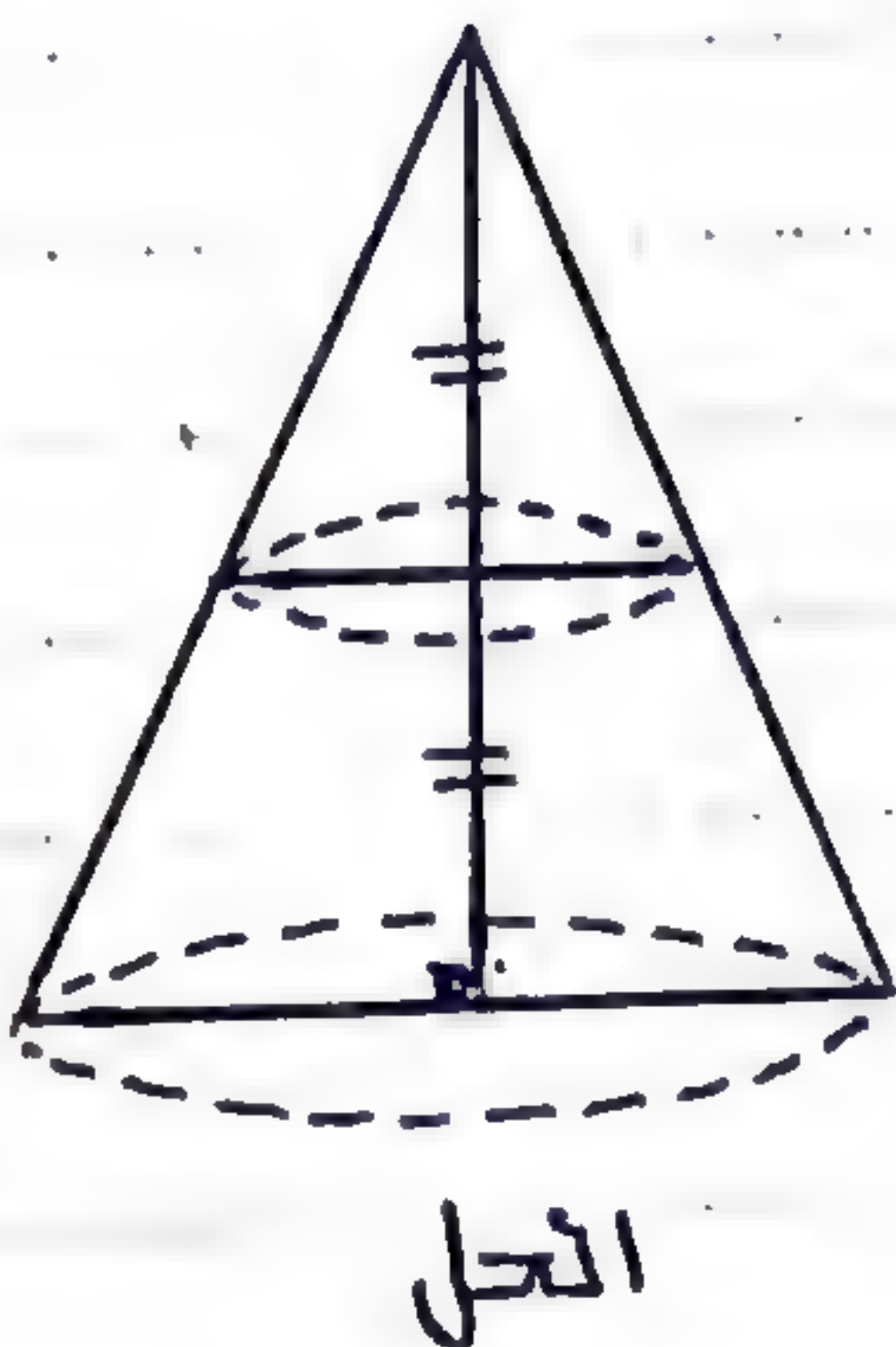
$$= ٣,٣ \quad \text{وحدة مربعة}$$

التكلفة:

$$= ٣٠٠ \times ٣,٣ = ٩٩٠ \text{ جنيه} \quad \#$$

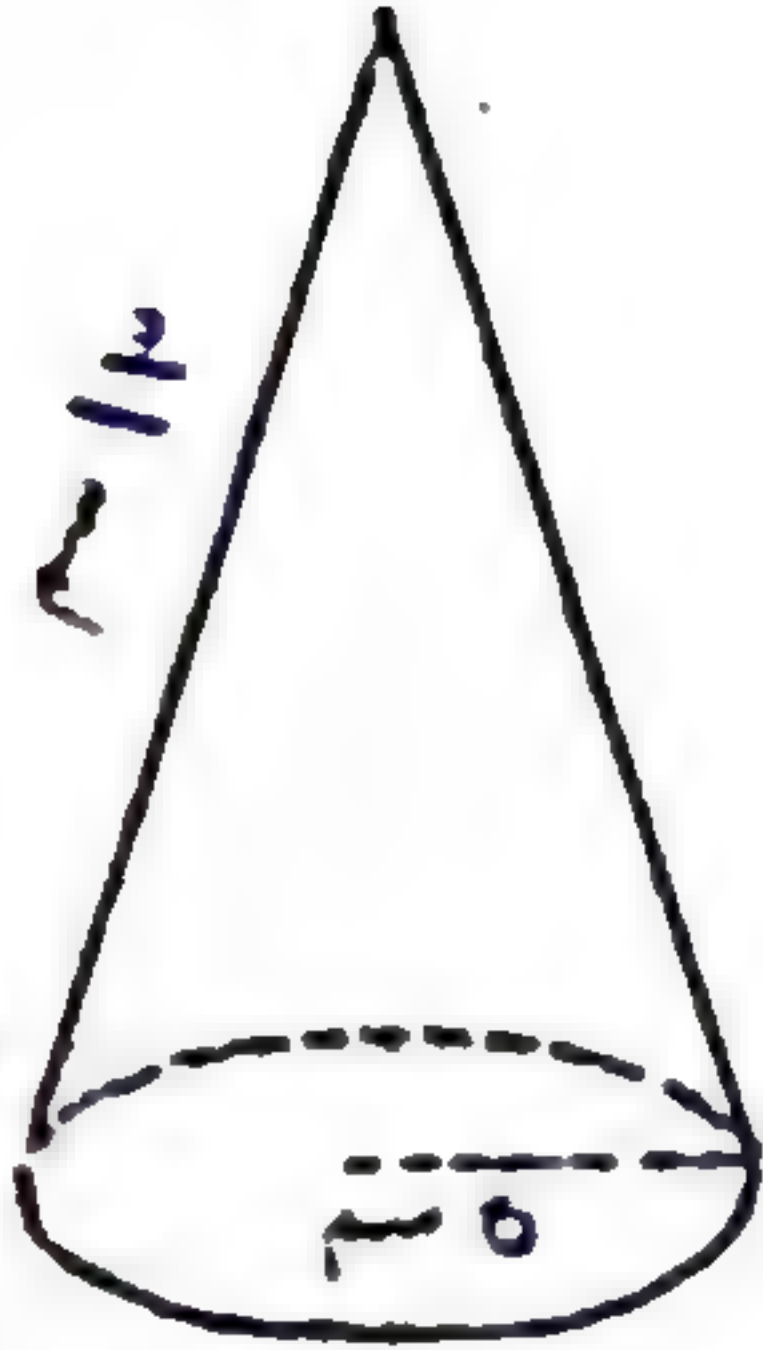
A diagram of a cone. A vertical line segment from the apex to the center of the base is labeled 10. A horizontal line segment from the center of the base to the edge is labeled 12. A right-angle symbol is shown at the center of the base where these two segments meet.

■ المساحة الجانبية للمخروط
الصغير : المساحة الجانبية للمخروط الأكبر
من الشكل الذي أمامك يساوي

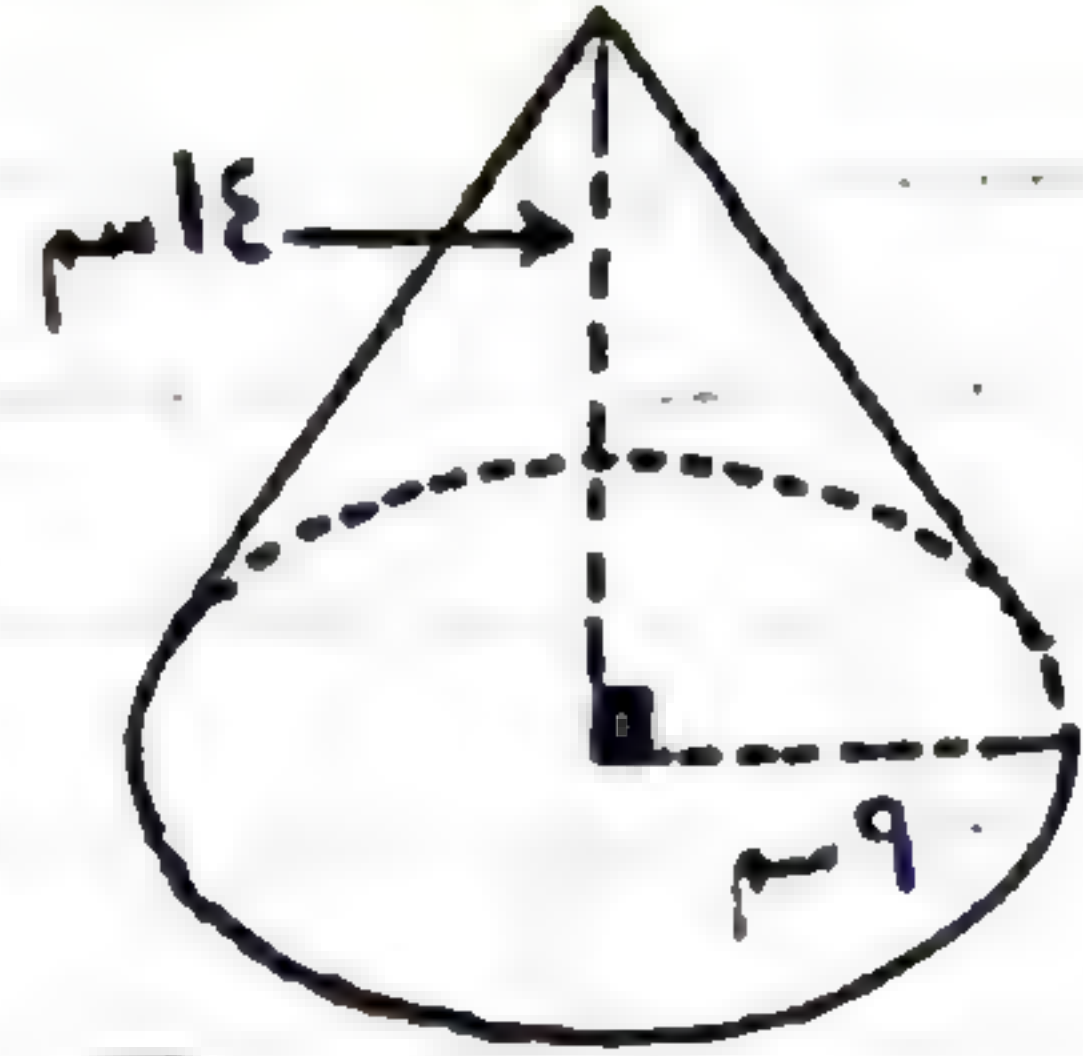


01030252232

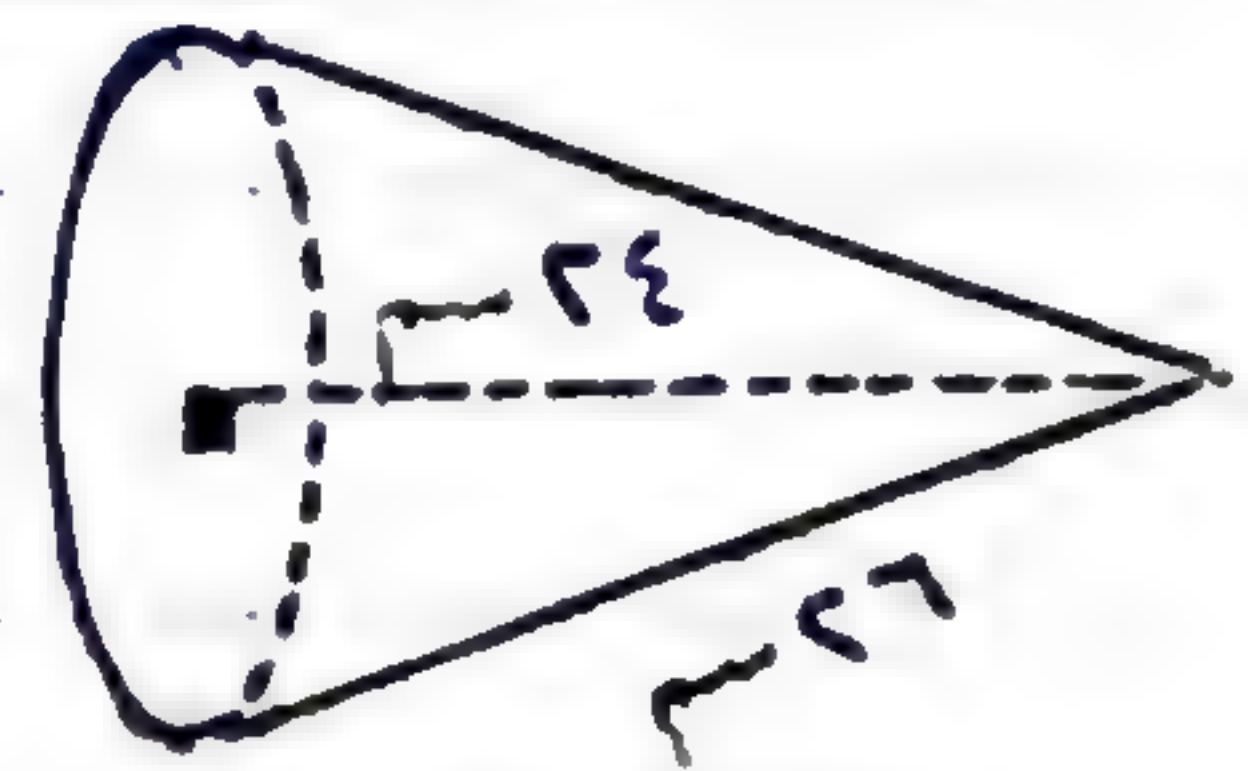
١٨) أوجد الحجم لكل مخروط قائم
هو منح بالشكل حسب البيانات الممطاة



حالة أن يحل
الإجابة (١٠٠) π سم^٣



حالة أن يحل
الإجابة (٣٧٨) π سم^٣



حالة أن يحل
الإجابة (٨٠٠) π سم^٣

المساحة الكلية :

$$\pi l \text{ نصف} + \pi \text{ نصف} =$$

$$\pi \text{ نصف} (l + \text{نصف}) =$$

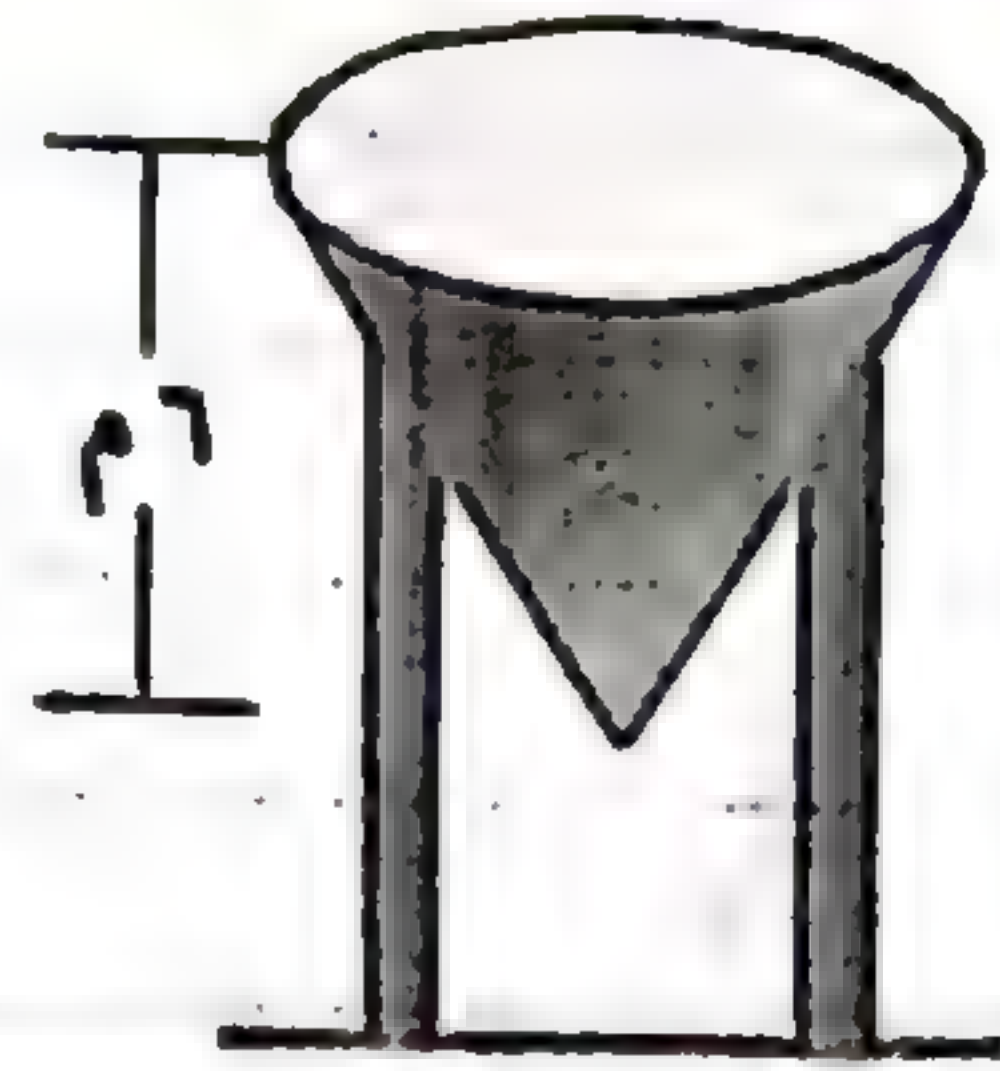
$$\pi \times 2 \times (137.3 + 6) =$$

$$\approx 140.9 \text{ م}^2 \quad \#$$

هنا م حل
الله بآياتك للعلماء في نباتك

١٩) كلا الشكل التالي :

صهر يـج مياه على شكل مخروط قائم
، حجمه $32 \pi \text{ م}^3$ ، ارتفاعه 6 م
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته
الكليّة .



الحل

$$\text{حجم الصهر يـج} = \frac{1}{3} \pi \text{ نصف}^2 \times 6$$

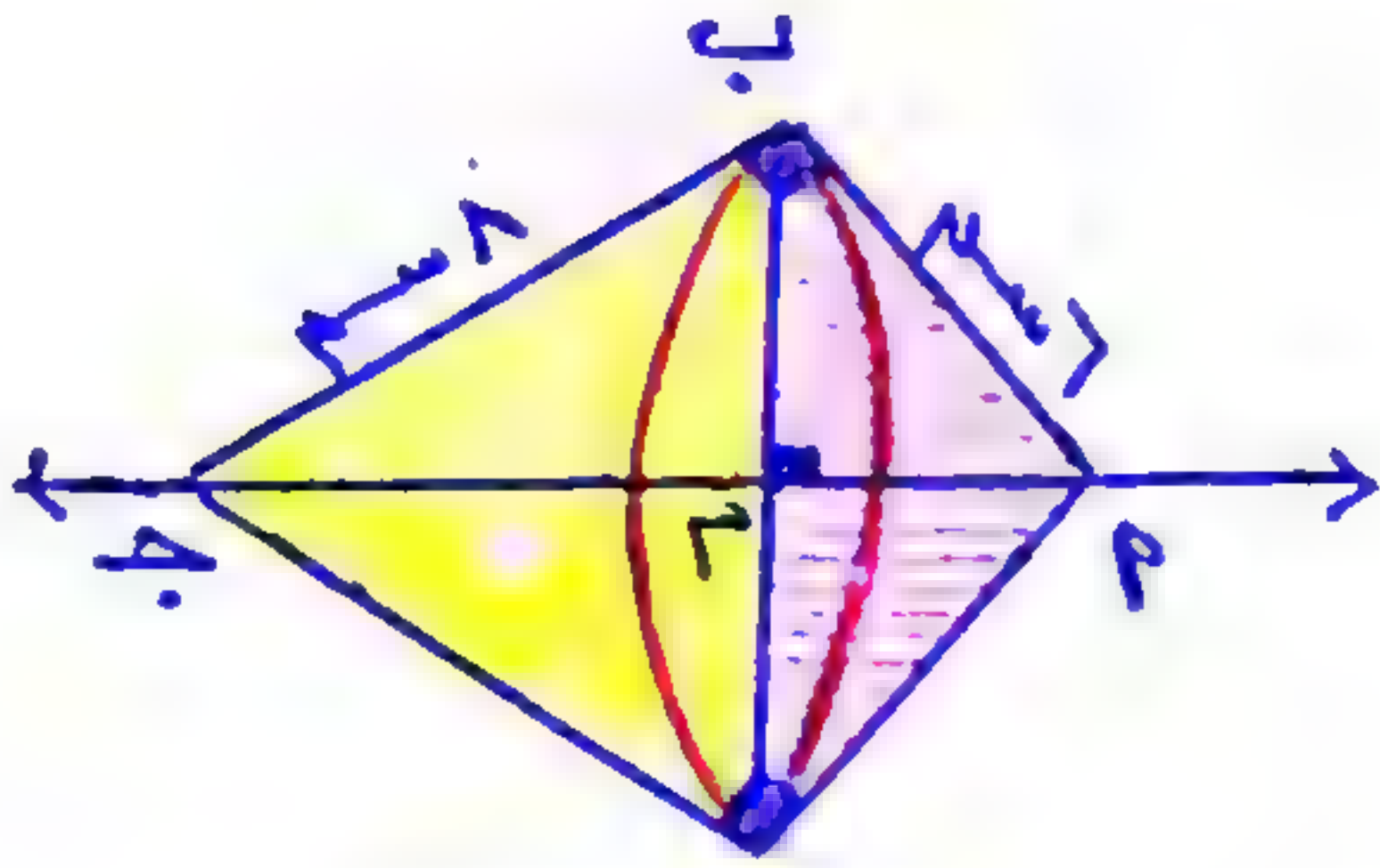
$$\therefore 32 \pi = \frac{1}{3} \pi \times \text{نصف}^2 \times 6$$

$$\therefore \text{نصف}^2 = 16 \rightarrow \text{نصف} = 4 \text{ سم}$$

$$l = \sqrt{\text{نصف}^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (6)^2}$$

$$= 7.31 \text{ م}$$



المطلوب: المساحة الكلية بـ
 $10 = \frac{1}{2} \times (6 + 14) \times h$

من نظرية أقليدس
 $h = \frac{14 \times 6}{10} = 8.4$

المساحة الكلية = 10 cm²

المساحة الكلية = 14

$14 = \frac{1}{2} \times (6 + 14) \times h$

المساحة الكلية = 8.4

المساحة الكلية = 6

$6 = \frac{1}{2} \times (6 + 14) \times h$

الحجم:

$\frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 8.4 =$

$+\frac{1}{3} \times \pi \times (14)^2 \times 6 =$

$= 76.8 \pi \text{ سم}^3$

٥) المساحة الكلية قائمة الزاوية بـ

فيه $AB = 10 \text{ سم}$, $BC = 8 \text{ سم}$

أوجد حجم الجسم الناتج من

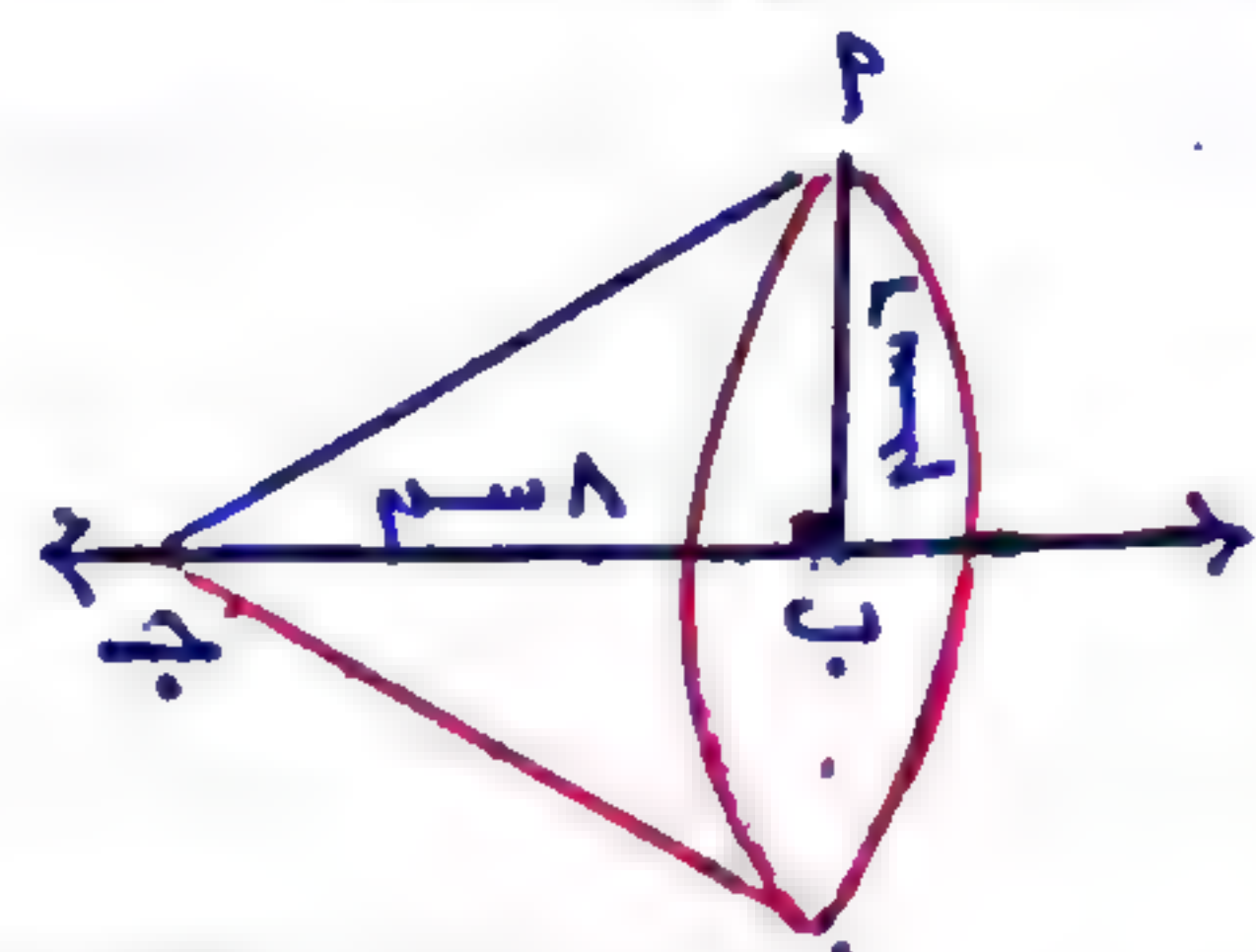
دوران ΔABC دورة كاملة حول:

Ⓐ AB

Ⓑ BC

الحل

الدورات حول AB



مخروط قائم:

$8 = \frac{1}{2} \times 10 \times h$

∴ الحجم:

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (8)^2 \times 10$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 10$

$= 213.3 \pi \text{ سم}^3$

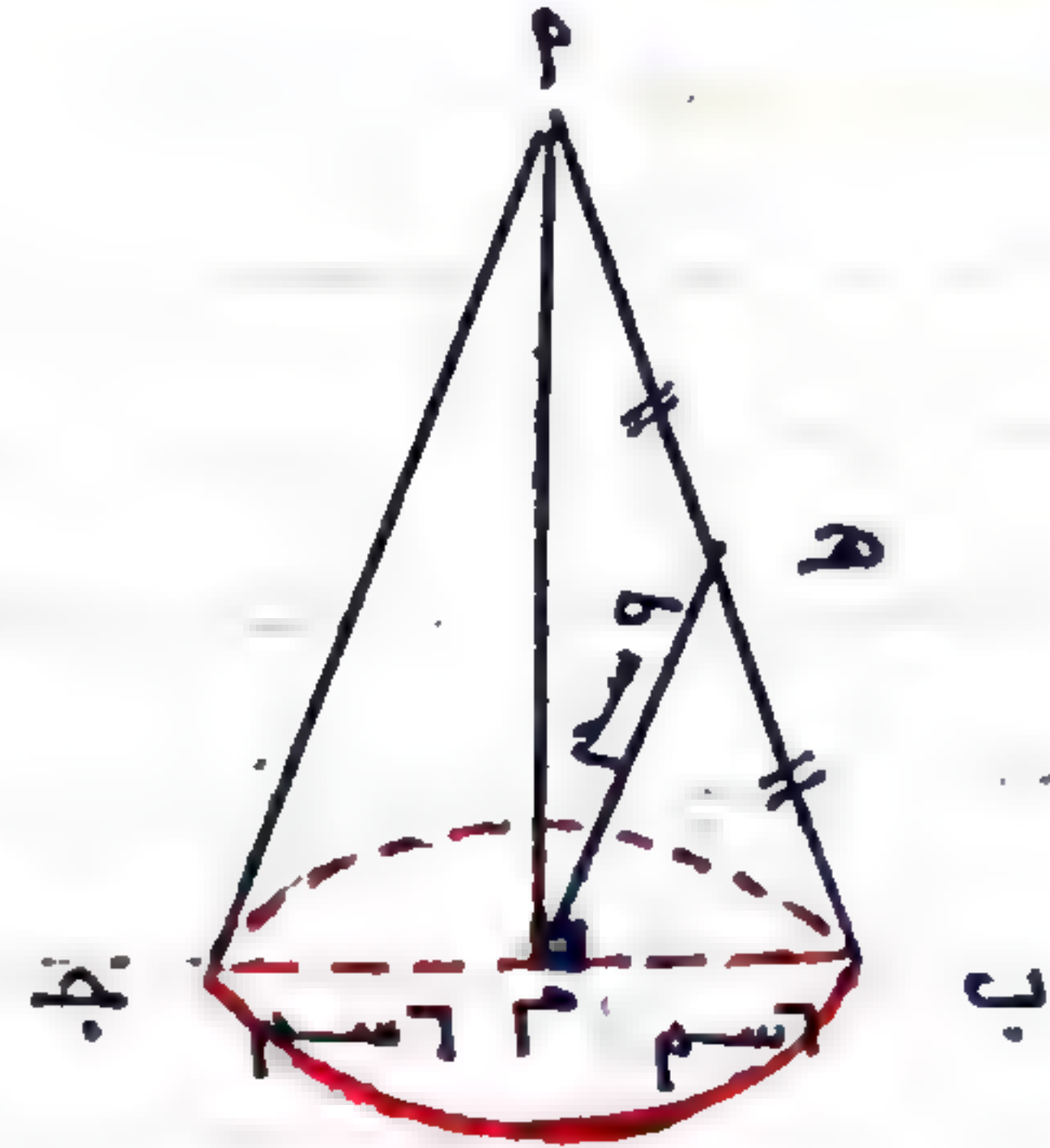
الدورات حول الوتر AC

ينتج مخروط وطبق قاعدتهما المشتركة

هنا نصف قطرهما من خلال الشكل

التالي

٢١) أوجد المساحة الجانبية والكلية
والحجم للمخروط الدائري القائم
بالشكل التالي :



الحل

٥. $PO = 12$ م قائم كل م
٦. $AO = 9$ م متوسط خارج من رأس
القائمة حيث $AO \perp PO$
∴ $PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ م
∴ $L = \pi r l = \pi \times 9 \times 15 = 135\pi$ سم^٢

$$S = \pi r^2 = \pi (9)^2 = 81\pi$$

$$= 135\pi + 81\pi = 216\pi$$

المساحة الجانبية

$$= \pi r l$$

$$= \pi \times 9 \times 15$$

$$= 135\pi \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية :

$$= \pi r l + \pi r^2$$

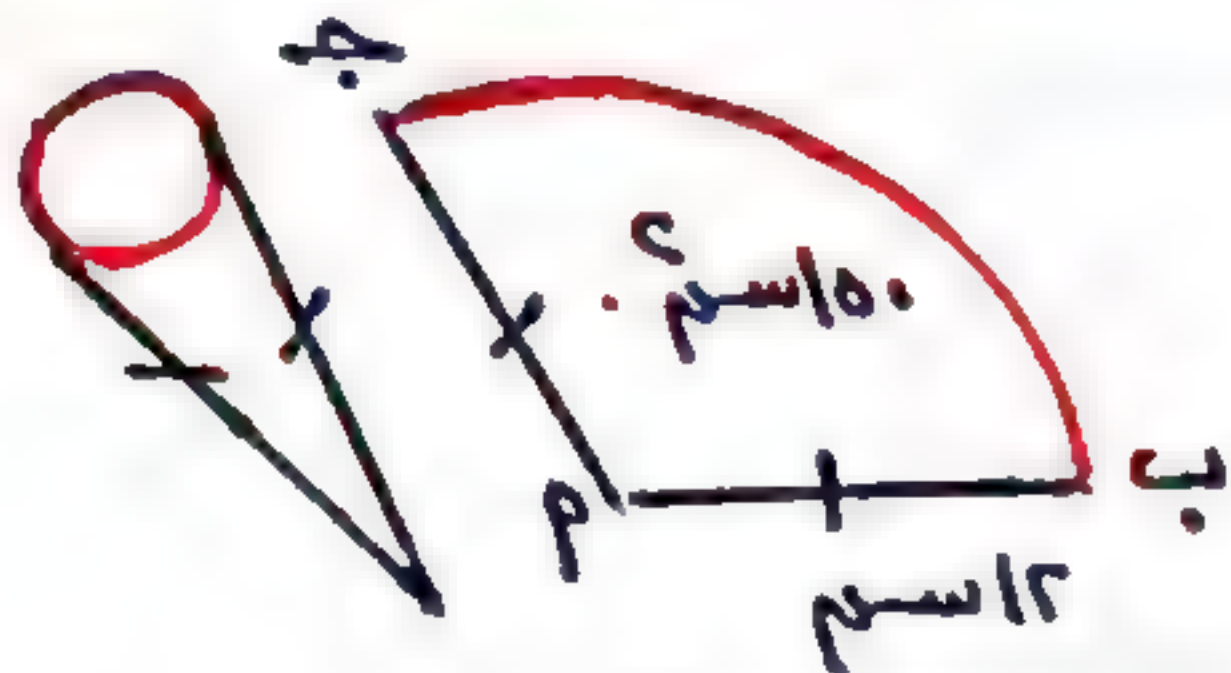
$$= 135\pi + 81\pi$$

الحجم :

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi (9)^2 (12) = 324\pi$$

٢٣) تغلف الألبان المتلحجة في مخروط دائري قائم بطح قطعة من الورق المازل للحرارة على شكل قطاع دائري طول نصف قطره دائريته ١٢ سم، ومساحته ١٥٠ سم^٢ بحيث يتلامس نصف قطره دائريته مع \overline{AB} ، أوجد ارتفاع المخروط



الحل

المقطع

$$\text{نصف} = 12 \text{ سم} \quad \text{و} \quad \text{ل} = ?$$

$$\text{مساحة المقطع} = \frac{1}{2} \text{ ل} \times \text{نصف}$$

$$150 = \frac{1}{2} \times \text{ل} \times 12$$

$$\therefore \text{ل} = 25 \text{ سم}$$

المخروط

$$\text{نصف (المقطع)} = \text{ل (المخروط)}$$

$$\therefore \text{ل} = 12 \text{ سم}$$

$$\text{ل (المقطع)} = 2\pi \times \text{نصف (قاعدة المخروط)}$$

$$25 = 2\pi \times \text{نصف}$$

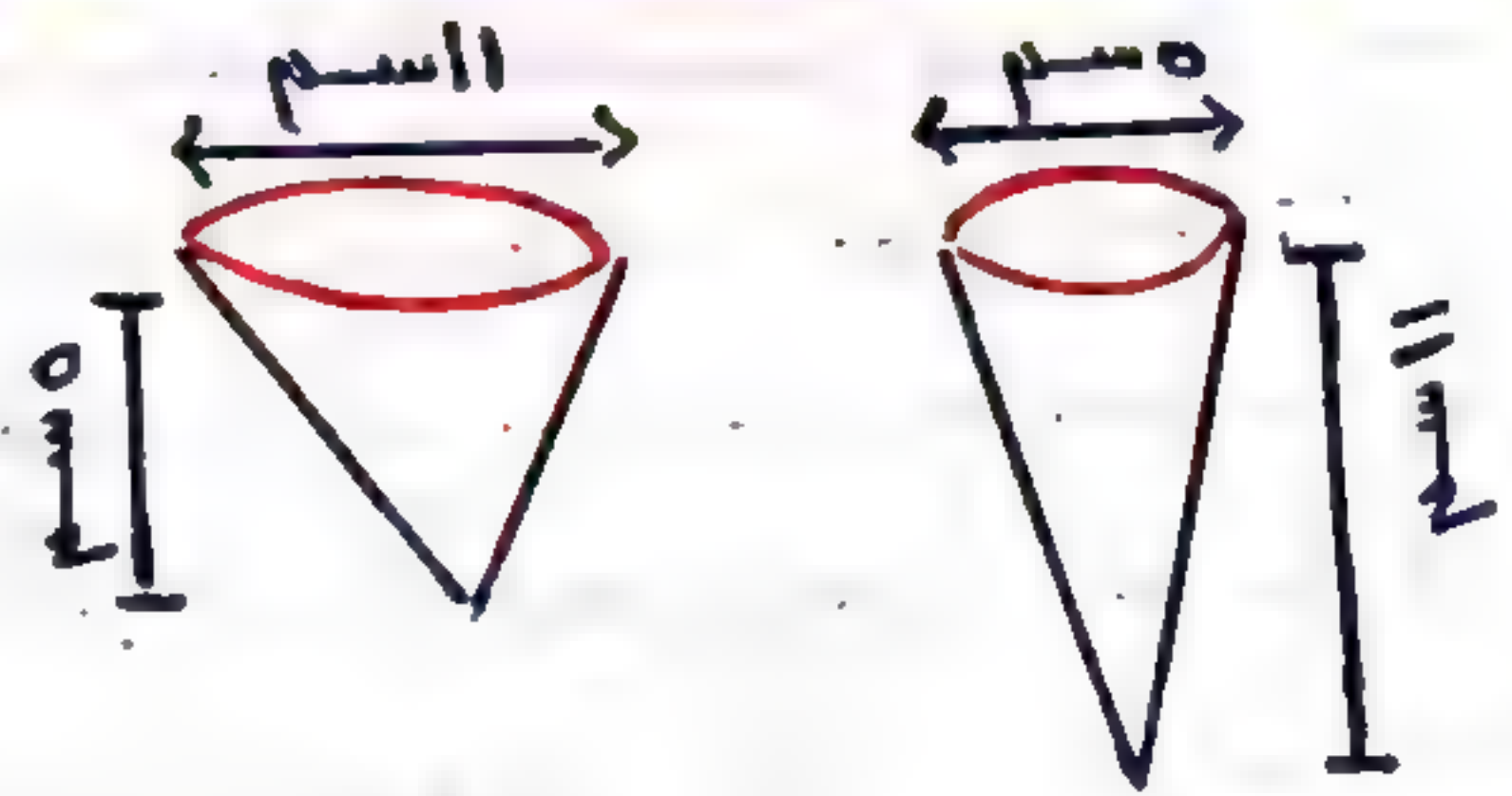
$$\therefore \text{نصف} = 4 \text{ سم}$$

$$\text{ل} = \sqrt{(12)^2 - (4)^2} = 11,3 \text{ سم}$$

٢٤) في الشكل التالي:

٢ ب كأسان للشراب أنهما سمتيه أكبر؟

أو جيب الفرق بين سمتيهما.



الحل

$$\text{نصف} = 11 \text{ سم} \quad \text{و} \quad \text{ل} = 9 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سمت الأول} = \frac{1}{3} \times \pi \times (11)^2 \times 9$$

$$= \frac{375}{12} \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{نصف} = 5 \text{ سم} \quad \text{و} \quad \text{ل} = 7 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{سمت الثاني} = \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 7$$

$$= \frac{175}{12} \pi \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{سمت الثاني} < \text{سمت الأول}$$

الفرق بين سمتيهما:

$$= \frac{375}{12} \pi - \frac{175}{12} \pi = \frac{200}{12} \pi \text{ سم}^3$$

٢٥ مخروط دائري قائم حجمه ١١ سم^٣
أوجد حجمه عندما:

أ) نصفاه ارتفاعه.

ب) نصفاه طول نصف قطره.

ج) نصفاه ارتفاعه وطول نصف قطره

الحل

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times (\text{نصف})^2 \times \text{ع}$$

أ) نصفاه الارتفاع

$$\therefore \frac{1}{3} \times \pi \times (\text{نصف})^2 \times \text{ع} = 11 \text{ سم}^3$$

$$\therefore \text{الحجم} = 11 \text{ سم}^3$$

ب) نصفاه نصف القطر

$$\therefore \frac{1}{3} \times \pi \times (\text{نصف}^2) \times \text{ع} = 11 \times (2)$$

$$\therefore \text{الحجم} = 44 \text{ سم}^3$$

ج) نصفاه الارتفاع وطول نصف القطر

$$\therefore \text{الحجم} = 11 \text{ سم}^3$$

٢٦ غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم، وارتفاعه ٢٠ سم، احسب مساحته لأقرب سم^٢. ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل

$$\text{محيط القاعدة} = 2\pi \text{ نصف}$$

$$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times \text{نصف}$$

$$\therefore \text{نصف} = 14 \text{ سم}$$

$$L = \sqrt{(14)^2 + (20)^2} = 24 \text{ سم}$$

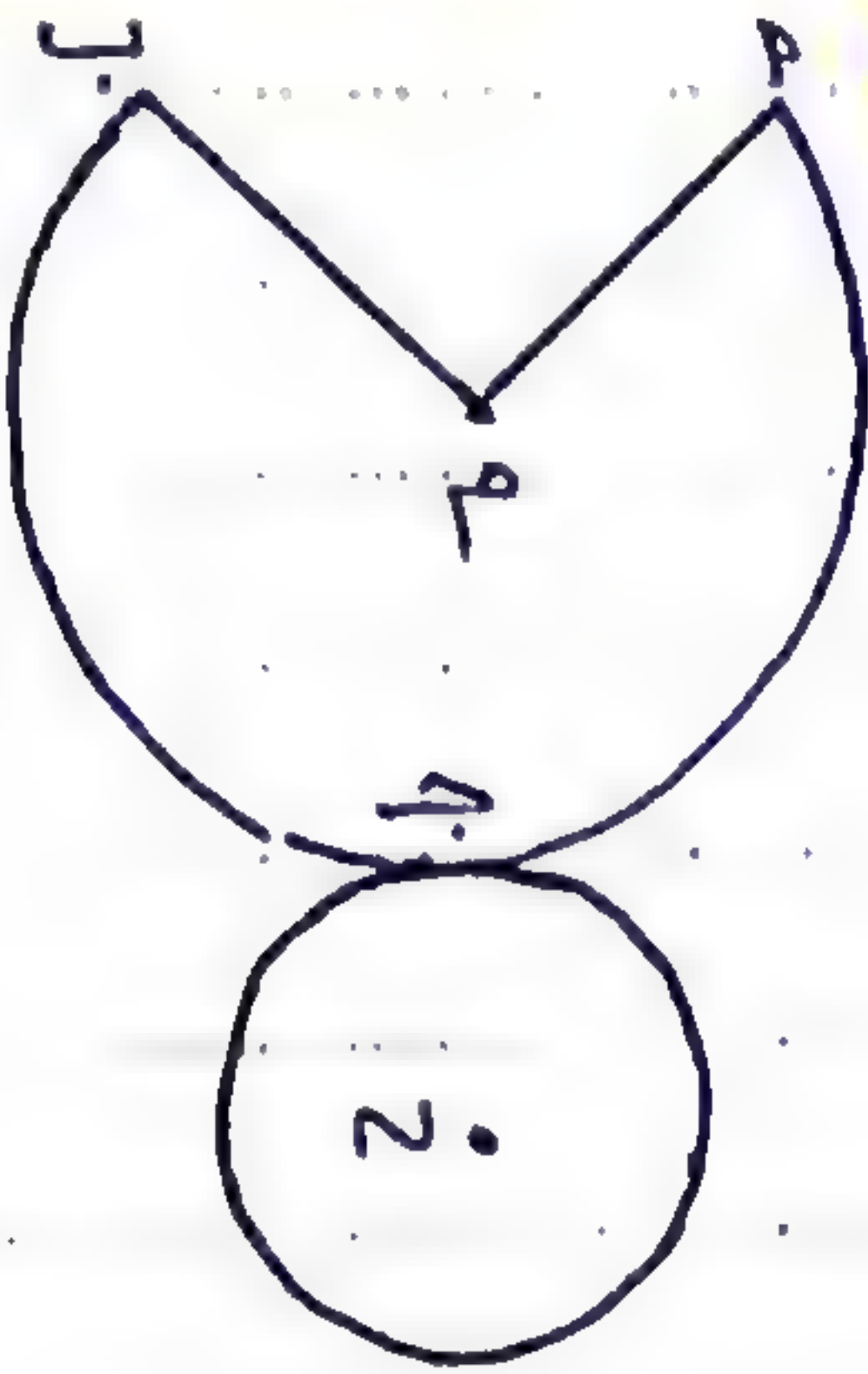
المساحة الجانبيه

$$= \pi \times \text{نصف} \times L$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 24$$

$$= 1056 \text{ سم}^2 \quad \#$$

٥٧) يمثل الشكل التالي شبكة لجسم مخروط قائم مكونة من قطاع دائري مساحته 20π سم^٢ وطول قوسه 8π سم. فأوجد ارتفاع المخروط؟



الحل

$$\begin{aligned} \text{ل. (للمطّاع)} &= 20\pi \text{ سم}^2 \text{ (قاعدة المخروط)} \\ 20\pi &= \pi \times 8 \times \frac{1}{2} \times \text{ل.} \\ \therefore \text{ل.} &= 5 \text{ سم. (للمخروط)} \end{aligned}$$

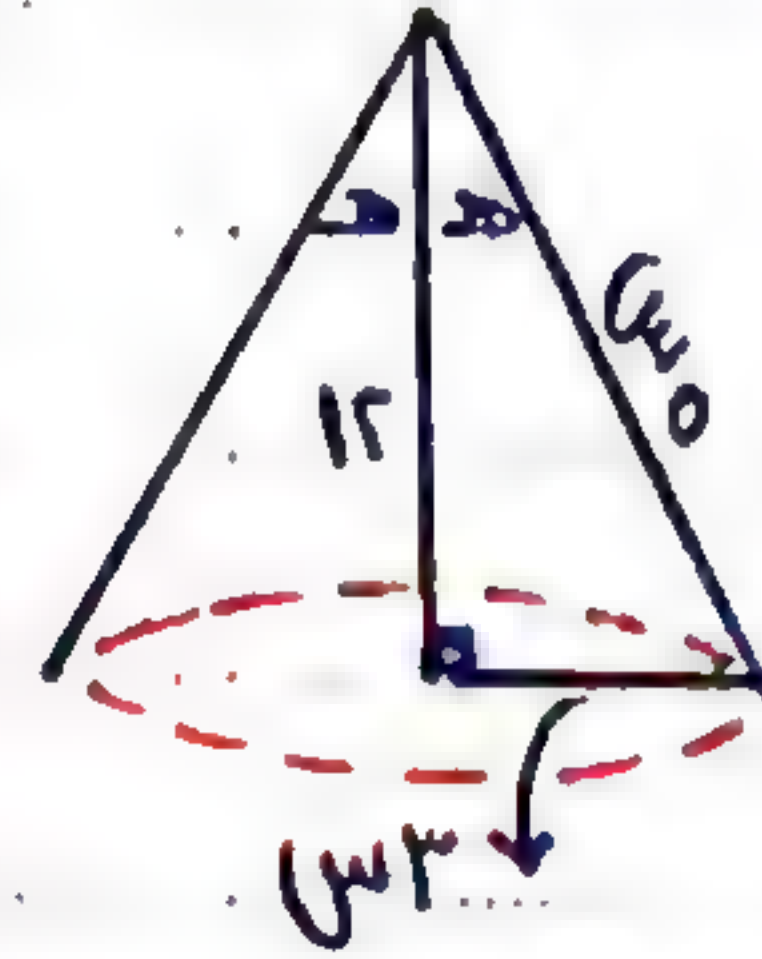
$$\begin{aligned} \text{مساحة المطّاع} &= \frac{1}{2} \times \text{ل.} \times \text{ج.} \\ 20\pi &= \frac{1}{2} \times 5 \times 8\pi \\ \therefore \text{ل.} &= 5 \text{ سم. (للمخروط)} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\text{ل.}^2 - \text{ن.}^2} = \text{ع.}$$

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = \text{ع.}$$

٥٦) مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢ سم وقياس زاوية رأسه ٢٠ درجة حسب جا هـ = $\frac{3}{5}$ أوجد مساحته الكلية بدلالة π

الحل



من قياسات:

$$\begin{aligned} 20^\circ \text{ س}^2 &= 9 \text{ س}^2 + 144 \\ 16 \text{ س}^2 &= 144 \Rightarrow \text{س}^2 = 9 \\ \therefore \text{س} &= 3 \end{aligned}$$

كما معانا:

$$\begin{aligned} \text{ل} &= 5 \text{ سم} = 3 \times 5 = 15 \text{ سم} \\ \text{ل.} &= 3^2 = 9 \text{ سم}^2 = 3 \times 3 = 9 \text{ سم}^2 \\ \text{ع} &= 2 \text{ سم} \end{aligned}$$

\therefore المساحة الكلية:

$$\begin{aligned} \pi \text{ ل.} + \pi \text{ ل.}^2 &= \pi (5 + 15) = 20\pi \\ &= 20\pi \times 9 = 180\pi \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

• لكي تستطيع تحديد ما اذا كانت المعادلة العامة تمثل معادلة دائرة أم لا تأكد من تحقق الشرط التالية :
 • أن تكون المعادلة من الدرجة الثانية فكم من x
 • أن تخلو المعادلة من الحد المشتمل على xy
 • معامل x^2 = معامل y^2 = 1
 • أن يتحقق الشرط : $h^2 + k^2 - c > 0$.

④ الدائرة :
 • هي مجموعة نقاط المستوي والتي يبعدُ
 بُعداً ثابتاً (نقطة) عن نقطة ثابتة (م).
 • c : مركز الدائرة
 • r : نصف قطر الدائرة

• الصور المختلفة لمعادلة الدائرة :

← الصورة الميَّاسية :
 (س - ٦) + (ص - ٥) = ٦

حيث :
 • $c = (٦, ٥)$
 • $r =$ (نصف القطر)
 • $r < 0$ صفر

• نصيحة رياضي :
 لما نجيب المركز ونصف القطر من المعادلة العامة تأكد أن معامل x^2 = معامل y^2 = 1
 خلاف ذلك قسم عليه أو اضربه فكم مكوسه
 الصواب

• للتوحيد :
 • إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

• للتحويل إلى معادلة مربع كامل :
 • مثلاً :

$$x^2 - ١٠x + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 - ١٠ + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 = ٥$$

$$x - ٥ = \pm \sqrt{٥}$$

$$x = ٥ \pm \sqrt{٥}$$

$$x^2 - ١٠x + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 - ١٠ + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 = ٥$$

$$x - ٥ = \pm \sqrt{٥}$$

$$x = ٥ \pm \sqrt{٥}$$

$$x^2 - ١٠x + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 - ١٠ + ٢٥ = ٠$$

$$(x - ٥)^2 = ٥$$

$$x - ٥ = \pm \sqrt{٥}$$

$$x = ٥ \pm \sqrt{٥}$$

← الصورة العامة :
 س + ص + ٢س + ٢ص + ١ = ٠
 حيث :
 • $c = (١, ١)$
 • $r = ١$
 • $r = ٠$ صفر
 • $r < ٠$ صفر

• إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

حيث :
 • $c = (١, ١)$
 • $r = ١$
 • $r = ٠$ صفر
 • $r < ٠$ صفر

• للتوحيد :
 • إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

حيث :
 • $c = (١, ١)$
 • $r = ١$
 • $r = ٠$ صفر
 • $r < ٠$ صفر

• إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

حيث :
 • $c = (١, ١)$
 • $r = ١$
 • $r = ٠$ صفر
 • $r < ٠$ صفر

• للتوحيد :
 • إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

حيث :
 • $c = (١, ١)$
 • $r = ١$
 • $r = ٠$ صفر
 • $r < ٠$ صفر

• إذا كان $c = (-٢, ٣)$
 فإن $h = ٢, k = ٣$

← حالات خاصة على مفادلة الدائرة:

• مفادلة الدائرة التي مركزها:

← نقطة الأصل:

$$س^2 + ص^2 = نه^2$$

← يمر بنقطة الأصل:

$$س^2 + ص^2 + ٢ال ص = صفر$$

$$\therefore ج = صفر$$

• مفادلة الدائرة التي تقع مركزها على

محور:

← السينات: $س^2 + ص^2 + ٢ال ص = صفر$

← الصادات: $س^2 + ص^2 + ٢ال ص = صفر$

• مفادلة الدائرة التي تقع بمس:

← محور السينات:

$$\therefore نه = ال \quad ؟ ج = ل^2$$

← محور الصادات:

$$\therefore نه = ال \quad ؟ ج = ل^2$$

← محور الاحداثيات:

$$\therefore نه = ال = لا$$

$$؟ ج = ل = ل^2$$

← ملاحظات مهمة بعبارة:

• اذا كانت مفادلة الدائرة هي:

$$(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = نه^2$$

لتحديد موضع النقطة م (س١ ص١) من

بالنسبة للدائرة نفو من كلا المفادلة السابقة

على س = س١ ص = ص١ فاذا كانت:

$$(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = نه^2$$

← نه = نه٢ ... النقطة م تقع على الدائرة

← نه < نه٢ ... النقطة م تقع خارج الدائرة

← نه > نه٢ ... النقطة م تقع داخل الدائرة

• اذا أعطاه مركز الدائرة م = (س١ ص١)

وكان المطلوب تحديد موضع النقطة

م (س٢ ص٢) بالنسبة للدائرة التي طول

نصف قطرها (نه) فاذا كان:

$$م م = نه \quad \therefore م تقع على الدائرة$$

$$م م < نه \quad \therefore م تقع خارج الدائرة$$

$$م م > نه \quad \therefore م تقع داخل الدائرة$$

مستساقي بالمعلم:

$$م م = (س٢ - س١)^2 + (ص٢ - ص١)^2$$

• القائم الزاوية مفادلة الدائرة المارة

برؤوسه مركزها يقع على منتصف الوتر

← مساحة كل من:

المضلع المنتظم:

$$\leftarrow = \frac{N}{2} \times س \times ظا (90 - \frac{180}{N})$$

المضلع المنتظم الذي يمر برؤوسه دائرة:

$$\leftarrow = \frac{N}{2} \times نه \times جا (\frac{360}{N})$$

حيث:

N ← عدد الأضلاع $ك$ $س$ ← طول الضلع

← طول العمود المرسوم من النقطة

(س ١ من ١) علم المستقيم:

$س + ب + ص + ج = ٠$ يعطى بالقانون:

$$ل = \frac{|س٢ + ب + ص٢ + ج|}{س٢ + ب}$$

← اذا كان:

$س٢ + ب + ص٢ + ج > ٠$ ب (س ٢ من ٢)

فان:

$$\leftarrow \overline{ب} = \sqrt{(س٢ - ص٢) + (س٢ - ب٢)}$$

$$\leftarrow \text{متنصف (ب)} = \left(\frac{س٢ + ب٢}{٢} \right) \text{ و } \left(\frac{س٢ + ص٢}{٢} \right)$$

← العلاقة بين دائرتين:

• لو معانا دائرتين مركزيهما: $م$ و $ن$ وطول نصف قطرهما: $نه١$ و $نه٢$ فان كان:

$$\leftarrow \overline{ن٢} < نه١ + نه٢$$

∴ الدائرتان متباعدتان

$$\leftarrow \overline{ن٢} > نه١ - نه٢$$

∴ الدائرتان متداخلتان

$$\leftarrow \overline{ن٢} = نه١ + نه٢$$

∴ الدائرتان مماستان من الخارج

$$\leftarrow \overline{ن٢} = نه١ - نه٢$$

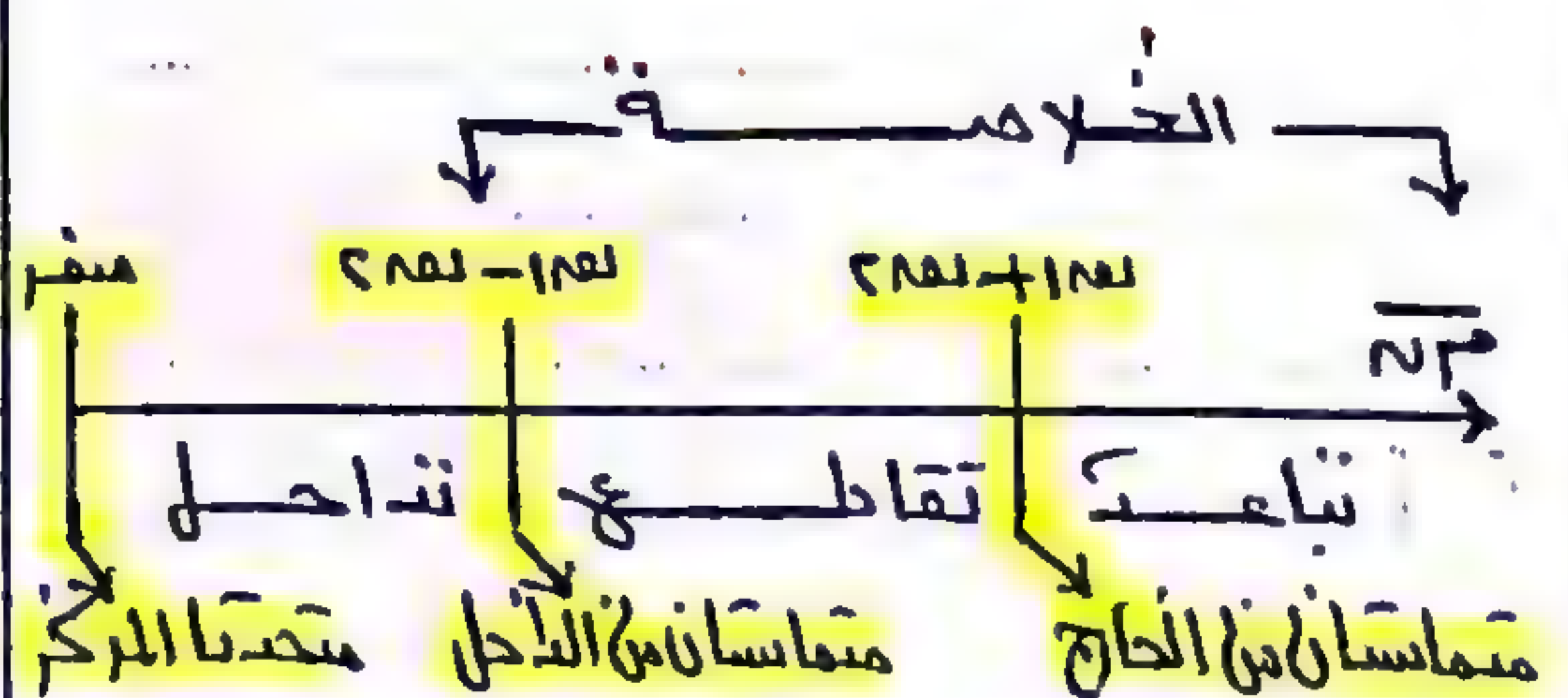
∴ الدائرتان مماستان من الداخل

$$\leftarrow \overline{ن٢} = \text{صفر}$$

∴ الدائرتان متحدتا المركز

$$\leftarrow نه١ - نه٢ > \overline{ن٢} > نه١ + نه٢$$

∴ الدائرتان متقاطعتان



③ أوجد إحداثي مركز الدائرة وطول نصف قطرها حيث :

$$^c(5) = ^c(12 - s) + ^c(5 + m)$$

الحل

$$^c(5 - 12) = m$$

$$^c(5) = 7 \text{ وحدات طول}$$

** تمارين محلولة **

① أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣٦٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات

الحل

$$^c(362) = m \quad ^c(7) = 7$$

$$^c(7) = ^c(12 - s) + ^c(13 - m)$$

④ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ | ٢-٦٣) وتقر بالنقطة (١٦١-)

الحل

$$^c(11 - 2) + ^c(1 + 3) = m$$

$$^c(5) = 0 \text{ وحدات طول}$$

$$^c(5) = ^c(12 + m) + ^c(3 - s)$$

⑤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢-٦٤) وطول قطرها ١٠ وحدات

الحل

$$^c(2 - 64) = m \quad ^c(10) = \frac{10}{2} = 5$$

$$^c(5) = ^c(12 + m) + ^c(2 - s)$$

والله اعلم
بما خفى
عنا
والله اعلم
بما خفى
عنا

٧) أوجد مساحة الدائرة التي مفادلتها

$$V = {}^c(5 - s) + {}^c(1 + s)$$

الحل

$$\sqrt{V} = \text{نصف}$$

$$\therefore \text{المساحة} = \pi \text{ نصف}$$

$$\pi (\sqrt{V}) =$$

$$\pi V = \#$$

طبعاً وحدة مساحة

٥) أوجد مفادلة الدائرة التي طول

قطرها \overline{P} حيث: $P(1-64)$ ب (-112)

الحل

$$3 = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{2-4}{2} \right) = (0, 1)$$

$$\overline{P} = \sqrt{(1-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\therefore \text{نصف} = \frac{\overline{P}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore (1-1) = {}^c(1-s) + {}^c(1+s)$$

$$10 = {}^c(1-s) + {}^c(1+s)$$

٨) أوجد محيط الدائرة التي مفادلتها

$$s = {}^c(5) + {}^c(8)$$

الحل

$$\sqrt{V} = \overline{V} = \text{نصف}$$

$$\therefore \text{المحيط} = \pi \times \text{نصف}$$

$$\pi \times \overline{V} \times 2 =$$

$$\pi \times \overline{V} \times 4 = \# \text{ وحدة طول}$$

٦) أوجد مفادلة الدائرة التي مركزها

$(-3, 2)$ وتقر بالنقطة $(5, 6)$

الحل

$$\text{نصف} = \sqrt{(5-(-3))^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

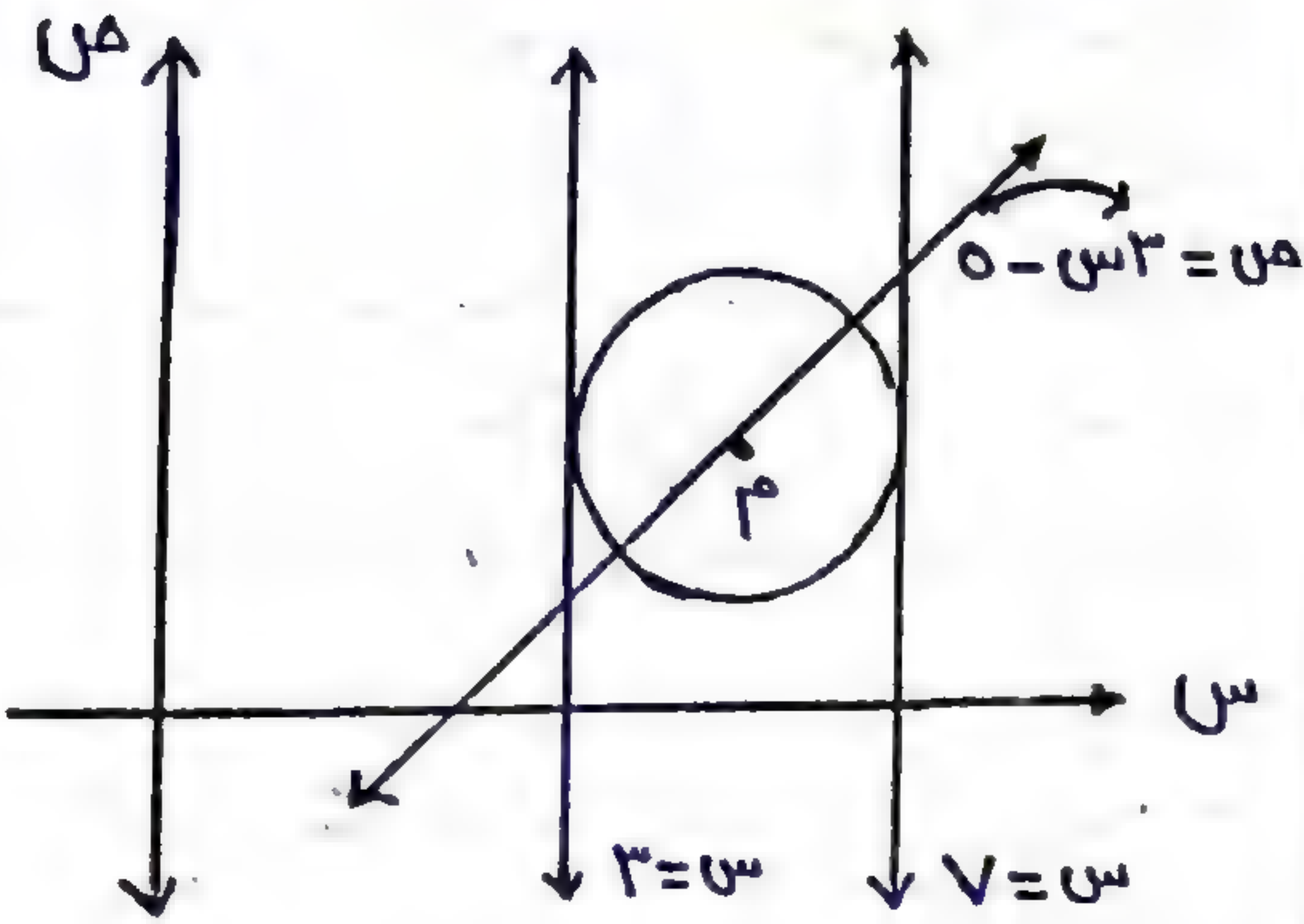
$$\overline{P} =$$

$$3 = (-3, 2)$$

$$\therefore (5-(-3)) = {}^c(3-s) + {}^c(2+s)$$

$$60 = {}^c(3-s) + {}^c(2+s)$$

١١) في الشكل التالي أوجد معادلة الدائرة.



الحل

المستقيمان $س = 3$ و $ص = 7$ يميزان

الدائرة. \therefore طول المقعر $= |3 - 7| = 4$

ومنها يأملم \leftarrow نصف $= 2$ وحدة طول

$3 = (5 ص) [5 \text{ تقع منتصف } 7 \text{ و } 3]$

ونقع على المستقيم: $ص = 3 - 5$

\therefore تحقق معادلتها

\therefore عندما $س = 0 \leftarrow ص = 5 - 3 \times 0 = 5$

ومنها $3 = (5 ص)$

$\therefore (س - 5) + (ص - 10) = 4$

أو

$ل = 5 - 5 = 0$ $ك = 10 - 10 = 0$ $ج = 6$

$\therefore ج = ل + ك = 0 + 0 = 0$ $ج = 6 - 10 + 5 = 1$

$س + ص - 10 = 1$ $س = 11$ $ص = 12$

٩) أوجد مركز الدائرة:

$س^2 + ص^2 - 6س + 8ص + 9 = 0$

ثم أوجد طول نصف قطر ها

الحل

نأخذ أولاً أن معامل $س = 6$ معامل $ص = 8$

$\therefore (6, 8) = \left(-\frac{1}{2} \times 6, -\frac{1}{2} \times 8 \right) = (-3, -4)$

$\therefore م = \left(-\frac{1}{2} \times 6 - \frac{1}{2} \times 8 \right) = (-3, -4)$

$نصف = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\# 4 = \sqrt{16} = \sqrt{9 + 16 + 9} = 5$

١٠) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها

$(5, -4)$ ويمس محور السينات

الحل

نمس محور السينات:

$\therefore نصف = 4 - 0 = 4$

$\therefore (س - 5) + (ص + 4) = 4$

يمكن نكتبها في الصورة العامة:

$ل = 5$ $ك = 4$ $ج = 4$

$\therefore س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + ج = 0$

$\therefore س^2 + ص^2 - 10س + 8ص + 20 = 0$

١٢) أوجد أحد أقطار المركز وحلّ نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

$$(س + ٢) + ص = ٩$$

الحل

$$٣ = (٩ هـ) = (-٩ هـ)$$

$$٢ = \sqrt{٩} = ٣ \text{ وحدات طول}$$

$$س + (ص + ٧) = ٢٤$$

الحل

$$٣ = (٧ هـ) = (-٧ هـ)$$

$$٢ = \sqrt{٤} = ٢ \text{ وحدة طول}$$

$$س + ص + ٤ = ١٢$$

الحل

$$٣ = (٤ هـ) = (-٤ هـ)$$

$$٣ = (٤ هـ) = (-٤ هـ)$$

$$٥ = ١٢ - ٩ + ٤ = ٥ \text{ وحدات}$$

$$س + ص - ٨ = ١٢$$

الحل

نفذ المادلة أولاً:

$$٣ = ١٢ - ٨ - ٩ = ٥$$

$$٣ = (٥ هـ) = (-٥ هـ)$$

$$٢ = ١٢ - ٥ + ٨ = ١٥$$

$$٢ = \sqrt{٤} = ٢ \text{ وحدة طول}$$

١٣) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها = ٣ وحداث طول ومعادلتها قطر بين قوسيهما:

$$س + ص = ٢$$

الحل

المركز (٣) هو نقطة تقاطع المقربين

$$س + ص = ٢$$

$$٢ = س - ص$$

بالجمع

$$٣ = س \leftarrow ٩ = س$$

$$١ = ص$$

$$٣ = (٣ هـ) = (-٣ هـ)$$

المادلة هـ:

$$\# ٩ = (١ + ص) + (٣ - س)$$

لا حركية مفادلة الدائرة التي تمس محاور
النقاط في النقطة (٣، ٠) :
∴ م = ٣ (٥، ٣) ... ١ (٠، ٣) = ٣

١٦) أوجد مفادلة الدائرة التي تمس المحاور
ومركزها (٤، -٤)

الحل

∴ الدائرة تمس المحاور

∴ م = ١ = ١ = ١ = ٤

المعادلة تكون :

$$\# 16 = {}^9(4 + م) + {}^9(4 - م) = 16$$

١٤) أوجد مفادلة الدائرة التي مركزها
٣ = (٣، ٢) والمستقيم : (٣، ٣) + ٤ م + ٢ = ٠
مماسا لها عند نقطة م

الحل

$$\text{نصفه} = ل = \frac{|٢ + ٣ \times ٤ + ٢ \times ٣|}{\sqrt{{}^9(٤) + {}^9(٣)}}$$

= ٤ وحدات طول

∴ المعادلة هي :

$$\# 16 = {}^9(٣ - م) + {}^9(٢ - م)$$

١٧) أوجد مفادلة الدائرة التي تمسها
قطر فيها : (٣، ٢) و (٥، ٦)

الحل

$$٣ = \left(\frac{٦-٢}{٣} \times \frac{٥+٣}{٢} \right) = (٢، ٤)$$

البعد بين النقطتين والمركز

(٣، ٢) و (٤، ٢)

$$\text{نصفه} = \sqrt{{}^9(٢+٤) + {}^9(٤-٢)} = \sqrt{١٧}$$

المعادلة هي :

$$\# 17 = {}^9(٢ + م) + {}^9(٤ - م)$$

١٥) أوجد مفادلة الدائرة التي طول
نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محاور
الصادات عند النقطة (٣، ٥)

الحل

تمس محور الصادات عند النقطة (٣، ٥)

∴ م = ٣ (٥، ٣) ... ٣ = (٥، ٣)

و نصفه = ٥ وحدات في الحالتين

عند ما :

$$\Leftarrow ٣ = (٥، ٣)$$

$$٢٥ = {}^9(٣ - م) + {}^9(٥ - م)$$

$$\Leftarrow ٣ = (٥، ٣)$$

$$٢٥ = {}^9(٣ + م) + {}^9(٥ + م)$$

١٨ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها
صورة الدائرة:

$$S^2 + S^2 - 12S + 7S + 20 = 0$$

بالانتقال إلى (س) $(S^2 + 7S - 12)$

الحل

$$S^2 - 5S - 12 = (S - 7) \times \frac{1}{7} = 12 \times \frac{1}{7} = 17 = 13$$

نعم = 0 وحدات

$$S^2 - 5S - 12 = (S - 7) \times \frac{1}{7} = 12 \times \frac{1}{7} = 17 = 13$$

نعم = 0 وحدات

∴ المعادلة المطلوبة هي:

$$(S - 12) + (S + 5) = 0$$

لاحظ:

← نعم هي الخطين متساويين
← المركز فقط حيث له انتقال

١٩ أوجد مركز الدائرة التي معادلتها

$$(S + 12) + (S + 5) = 0$$

الحل

اكمال مربع أسرع حل:

$$(S + 12) + (S + 5) = 1 - 1$$

$$1 = (S + 12) + (S + 5)$$

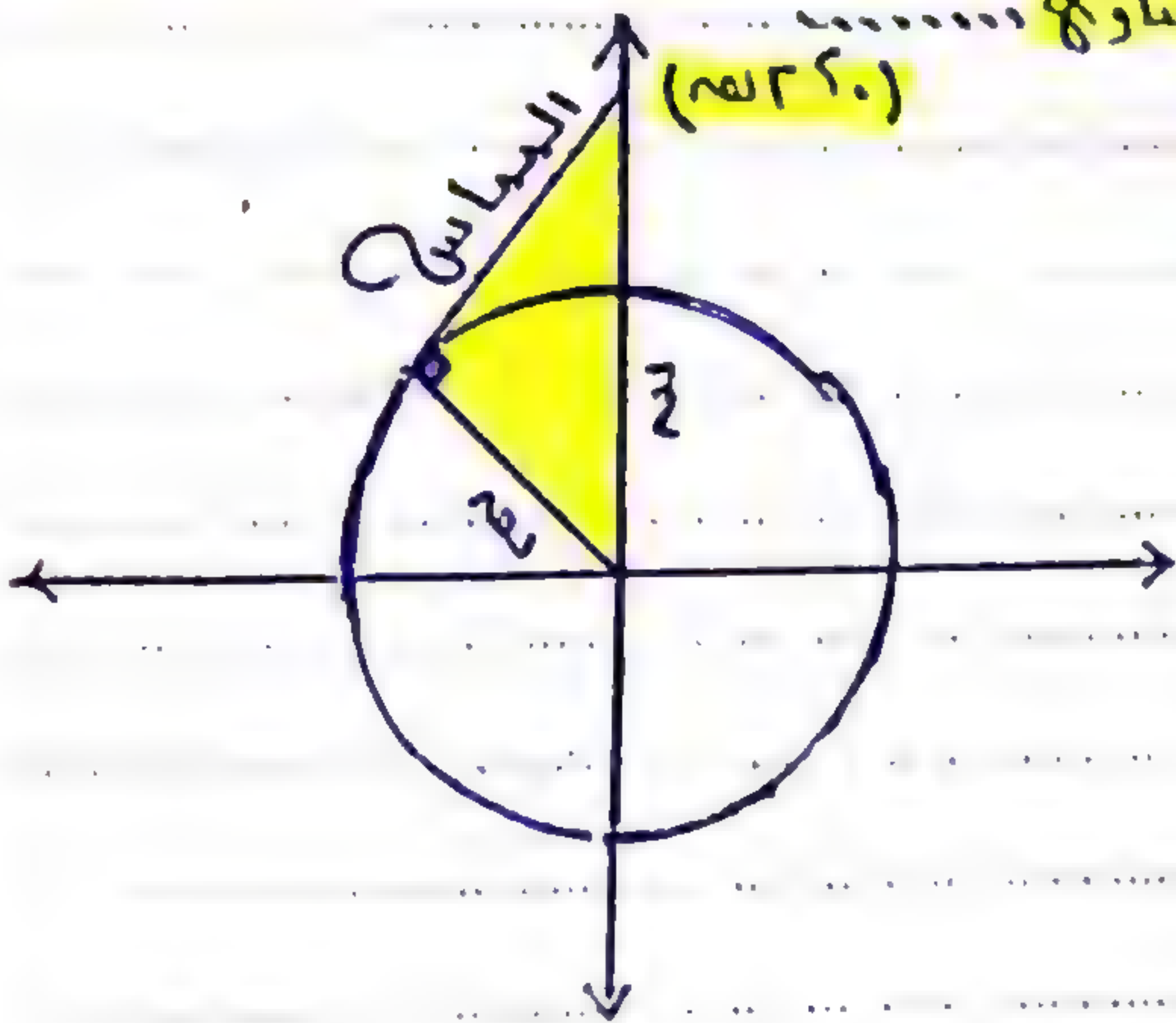
$$\# (S - 12) = 13$$

٢١ من خلال الشكل المقابل:

طول المقطعة المماسية المرسومة للدائرة

س + ص = نصف عند التقاطع (٢٠ ٢٠)

تساوي



الحل

$$\sqrt{(20)^2 - (20)^2} = \text{المماس}$$

$$\sqrt{400 - 400} =$$

$$\sqrt{0} =$$

$$\sqrt{0} =$$

٢٠ أوجد معادلة الدائرة التي

مركزها : م (٢٠ ٢٠) ويمس كل من

المستقيم س = ٢

الحل

∴ الدائرة لمس المستقيم س = ٢

$$\therefore \text{نصف} = |2 - 0| = 2, \text{ وحلات طول}$$

← المعادلة هي:

$$(x - 20)^2 + (y - 20)^2 = 4$$

المستقيم س = ٢

الحل

∴ الدائرة لمس المستقيم س = ٢

$$\therefore \text{نصف} = |2 - 2| = 0, \text{ وحدة طول}$$

← المعادلة هي:

$$(x - 20)^2 + (y - 20)^2 = 0$$

٥٣) أوجد لأقرب سم مساحة سطح
شكل خماسي منتظم تمرير رؤسها الدائرة
س^١ + س^٢ + س^٣ + س^٤ + س^٥ = ٥
علماً بأن كل وحدة في المستوى الاحصائي
تمثل ٥ سم؟

الحل

$$3 = \left(\frac{1}{7} \times 26 - \frac{1}{7} \times 12 \right) =$$

$$= (3.57 - 1.71) =$$

$$1.86 = 3.57 - 1.71$$

→ مساحة الشكل الخماسي المرسوم
داخل دائرة:

$$= \frac{2}{7} \times 1.86 \times \left(\frac{260}{2} \right) \text{ جا } \frac{2}{7}$$

$$= \frac{5}{7} \times (1.86) \times \left(\frac{260}{2} \right) \text{ جا } \frac{2}{7}$$

$$\approx 90.1 \text{ سم}^2$$

∴ المساحة المطلوبة

$$\approx 90.1 \times 25 = 2252.5 \text{ سم}^2$$

← الوحدة = ٥ سم

∴ الوحدة المربعة = ٢٥ سم^٢

٥٤) أوجد مساحة الدائرة التي مركزها
م تقع في الزاوية الأولى وطول نصف قطرها
يساوي ٢ وحدات طول والمستقيمان:
س = ١ ص = ٢ مماسان لها؟

الحل

المستقيمان المماسان هما:

$$\leftarrow \text{س} = ١ \quad \therefore \text{س} - ١ = ٣ \quad \leftarrow \text{س} = ٤$$

$$\leftarrow \text{ص} = ٢ \quad \therefore \text{ص} - ٢ = ٢ \quad \leftarrow \text{ص} = ٥$$

$$\therefore \text{المركز م} = (٤, ٥)$$

المعادلة هي:

$$(س - ٤)^2 + (ص - ٥)^2 = ٩$$

كان يشوشا ما ذهبت حراً

٢٥) سنأخذ مما يلي تكون الدائرتان متطابقتان أم لا؟ ولماذا؟

$$س^2 + ص^2 - ٤س + ٨ص = ٠$$

$$س^2 + ص^2 - ٢ص - ١٢ص + ١٦ = ٠$$

الحل

الدائرة الأولى:

$$٣ = (٤ - س) \times \frac{١}{٢} = (٨ - ٢ص) \times \frac{١}{٢}$$

$$٦ = ٤ - س \quad ١٢ = ٨ - ٢ص$$

$$٢ = -٢ص \quad ١٦ = -٤ص \quad ٤ = ص$$

الدائرة الثانية:

$$٣ = (١٢ - س) \times \frac{١}{٢} = (٢٠ - ٢ص) \times \frac{١}{٢}$$

$$٦ = ١٢ - س \quad ١٢ = ٢٠ - ٢ص$$

$$٢ = -٢ص \quad ١٦ = -٤ص \quad ٤ = ص$$

∴ الدائرتان متطابقتان

$$س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص = ٠$$

$$س^2 + ص^2 - ٢س + ٦ص - ١١ = ٠$$

الحل

نحل باكمال المربع من باب التغيير

$$٠ = ٣ - ٤ - (٢ + ص) + (١ - س)$$

$$٨ = (٢ + ص) + (١ - س)$$

$$٨ = ٢ + ص + ١ - س$$

$$٥ = ص - س$$

$$٥ = ص - س$$

$$٥ = ص - س$$

∴ الدائرتان غير متطابقتان

٢٤) مسم مهندس معمار في مبنى

قاعدته على شكل مكعب منتظم

برؤوسه الدائرة:

$$س^2 + ص^2 - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠$$

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب

وحدة مربعة؟

الحل

$$٣ = (٤ - س) \times \frac{١}{٢} = (١٢ - ٢ص) \times \frac{١}{٢}$$

$$٦ = ٤ - س \quad ١٢ = ١٢ - ٢ص$$

$$٦ = ٤ - س \quad ١٢ = ١٢ - ٢ص$$

$$٢ = -٢ص \quad ١٦ = -٤ص \quad ٤ = ص$$

∴ وحدة طول

مساحة التماثل المنتظم الذي له

برؤوسه الدائرة:

$$\frac{٣٦٠}{٨} \times \frac{١}{٢} \times (١٠) \times جا ٦٠ =$$

$$٢٨٣ \approx$$

وحدة مربعة #

٢٦) بين ان كل من المعادلات الآتية تغير على دائمة:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

الحل

يوجب حد مشترك على x من
 \therefore ليست معادلة دائمة

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

الحل

معامل $x^2 = 1$ ، معامل $x = 3$

\therefore معامل $x^2 \neq$ معامل $x \neq 1$

\therefore ليست معادلة دائمة

$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 8 = 0$$

الحل

ا ضرب كل x

$$\therefore x^3 + x + x - 8x = 0$$

معامل $x^3 = 1$ ، معامل $x = 2$

معامل $x^3 \neq$ معامل $x \neq 1$

$$\therefore x^3 + 2x - 8x = 0$$

$$\therefore x^3 - 6x = 0$$

$$= 36 < 0$$

\therefore معادلة دائمة #

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

الحل

معامل $x^2 = 1$ ، معامل $x = 7$

معامل $x^2 \neq$ معامل $x \neq 1$

$$\therefore x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$= \frac{9}{7} < 0$$

\therefore المعادلة هي معادلة دائمة #

٢٧) بين ان النقاط التالية تنتمي

الى الدائرة د التي معادلتها:

(س - ١٦) + (ص + ١) = ٢٥ ، ثم حدد موضع النقطة الأخرى بالسنة

الى الدائرة د حيث:

٢ (٣٦٩) ك ب (٥٦٧)

ج (٣٦٣) د (٣-٦٢)

الحل

٢ (٣٦٩) =

∴ (١ + ٣) + (٦ - ٩) =

= ٩ + ١٦ = ٢٥ = نصف

∴ تقع على الدائرة #

ب (٥٦٧) =

∴ (١ + ٥) + (٦ - ٧) =

= ١ + ٣٦ = ٣٧ < نصف

∴ ب تقع خارج الدائرة

ج (٣٦٣) =

∴ (١ + ٣) + (٦ - ٣) =

= ٩ + ١٦ = ٢٥ = نصف

∴ ج تقع على الدائرة

د (٣-٦٢) =

∴ (١ - ٣) + (٦ - ٢) = ٢٠ > نصف

∴ د تقع داخل الدائرة

٢٨) بين ما اذا كانت الدائرتان:

د١: س + ص - ١٠ = اس - ٨ ص + ١٦ =

د٢: س + ص + ١٢ = اس + ١٠ ص - ٢٦ =

مماستان من الخارج أم لا ولماذا؟

الحل

$$(٨ - ١٠) = (١٠ - ٨) \Rightarrow ١٣ =$$

$$(٤٠٥) =$$

$$١٦ = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$١٦ = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$(١٠ - ٨) = (٨ - ١٠) \Rightarrow ٢٣ =$$

$$(٥٠٦٧) =$$

$$٢٦ = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$٢٦ = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$١٦ + ٢٦ = ٤٢ = ١٠ + ٥ = ١٥$$

$$\sqrt{(١٥ + ٤) + (١٧ + ٥)} = ٢٣,١٣$$

$$= ١٥$$

$$٢٣,١٣ = ١٦ + ٢٦$$

∴ الدائرتان مماستان من الخارج #

٣٠) اكتب الصورة العامة لمعادلة
الدائرة التي تمر بالنقطتين:
٢ (٢٥٦) و ٢ ب (١-٢٠) وللمماسات
لها عند ٢ ب متوازيات.

الحل

المماسان متوازيان عند ٢ ب
∴ \overline{CP} قطر في الدائرة

$$\therefore ٣ = \left(\frac{١-٢}{٢} \right) \left(\frac{١}{٢} \right) = \left(\frac{١}{٢} \right) (٢٠)$$

$$\therefore \text{نعم} = \frac{١}{٢} \sqrt{(١٣-٢)^2 + \left(\frac{١}{٢} - ٢\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{٥٧٣}}{٢} =$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{٥٧٣}}{٢} \right)^2 = \left(\frac{١}{٢} - ٢ \right)^2 + (٣ - ٢)^2$$

أو أ ب:

$$\# \quad ٣ + ٢ - ٢ - ٢ = ٢ - ٢ - ٢ - ٢$$

الاعداد صحيحة

٢٩) اكتب الصورة العامة لمعادلة
الدائرة اذا كانت:

مركزها م (٢٥١) وتمس المستقيم
المار بالنقطتين: (١٧٢) و (٢٥١-٢)

الحل

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{٢-١}{٢-١} = ١$$

المعادلة للميل:

$$٣ = \frac{١ - ٢}{٢ - ١}$$

$$١ = \frac{٢ - ١}{٢ - ١}$$

$$\therefore ٢ - ١ = ٢ - ١$$

$$\text{ومنها} \quad ٢ - ١ = ٢ - ١$$

$$\# \quad \text{نعم} = \frac{|٢ + ٣ \times ١ - ٥ \times ١|}{\sqrt{١ + ١}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore (٢ - ١) + (٢ - ١) = \text{نعم}$$

$$\therefore (٢ - ١) + (٢ - ١) = \text{نعم}$$

أو أ ب:

$$\# \quad ٣ + ٢ - ٢ - ٢ = ٢ - ٢ - ٢ - ٢$$

خلق بالك من نفسك يا بن عيسى

$$\# \quad 0 = 7 + 8 - 9 \quad \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 8 \text{ ص} + 7 = 0$$

٣١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها يقع على محور السينات وتَمُر بالنقطة (٢, ٠) ؟ (٨, ٠)

الحل

$$= 3 = \left(\frac{0+2}{2} \right)^2 + \left(\frac{0+0}{2} \right)^2 = (0.5)^2$$

$$= 3 = \sqrt{(0-0)^2 + (0-2)^2} = 3 \text{ وحدات}$$

$$ل = 0 \quad ٥ = ٤ \quad ٠ = ٤ \quad ٣ = ٤$$

$$= 16 = 9 - 0 + 25 = ٣$$

$$\# \quad 0 = 16 + 10 - 9 \quad \text{س}^2 + \text{ص}^2 - 9 \text{ ص} + 16 = 0$$

٣٢) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها يقع على محور

الصائبات وتَمُر بالنقطة (٠, ٧) ؟ (٠, ١٦)

الحل

$$= 3 = \left(\frac{0+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{0+0}{2} \right)^2 = (0.5)^2$$

$$= 3 = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 3 \text{ وحدات}$$

$$ل = 0 \quad ٥ = ٤ \quad ٤ = ٤ \quad ٣ = ٤$$

$$= 9 = 16 + 0 - 9 = ٧$$

٣٣) أوجد طول نصف القطر وكذلك المركز للدائرة التي معادلتها :

$$0 = 49 - \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل

بفك المحدد :

$$0 = 49 - (8 \times 8 - 7 \times 7)$$

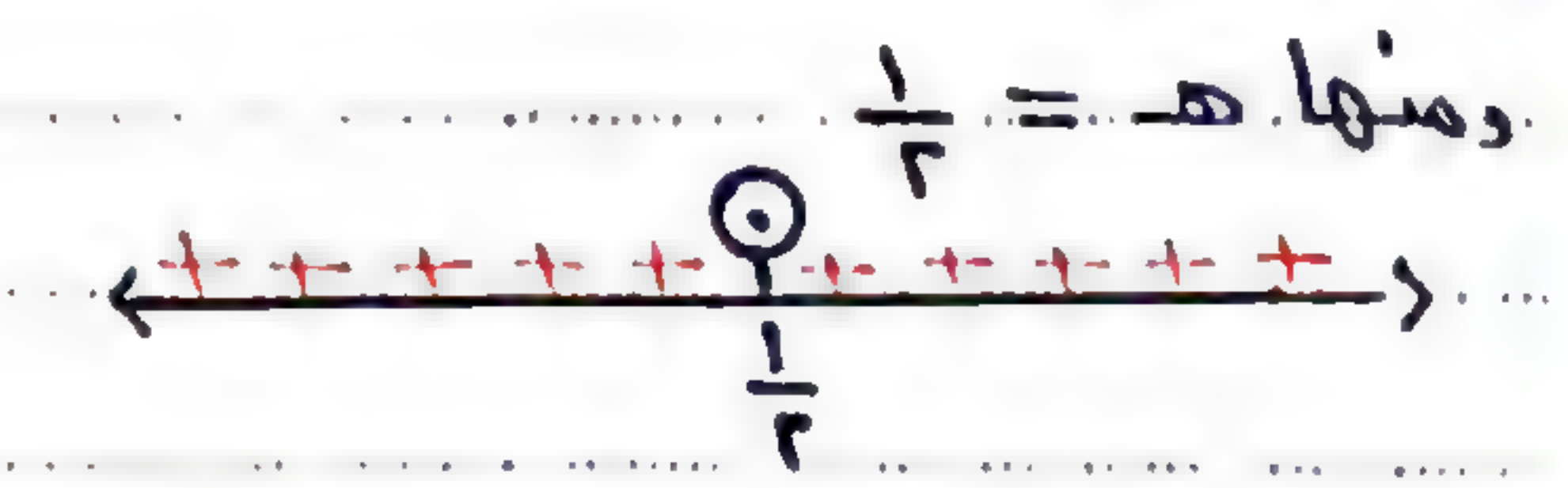
$$49 = 64 - 49$$

$$9 = 64 - 49 \quad \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 9$$

$$3 = 0 \quad (0, 0)$$

$$\# \quad 7 = 3 \text{ وحدات طول} \quad 0 = 7$$

$(1-h) = 0 \dots \dots \dots = 1-h$



$\# \dots h \in [1/7, 2]$

٣٥) اثبت ان المثلث الذي رؤوسه :

١٢(٠٨) ٦(٠٨) ب (٦٥) ٦(٠٨) قائم

الزاوية ثم اوجد معادلة الدائرة المارة

برؤوسه.

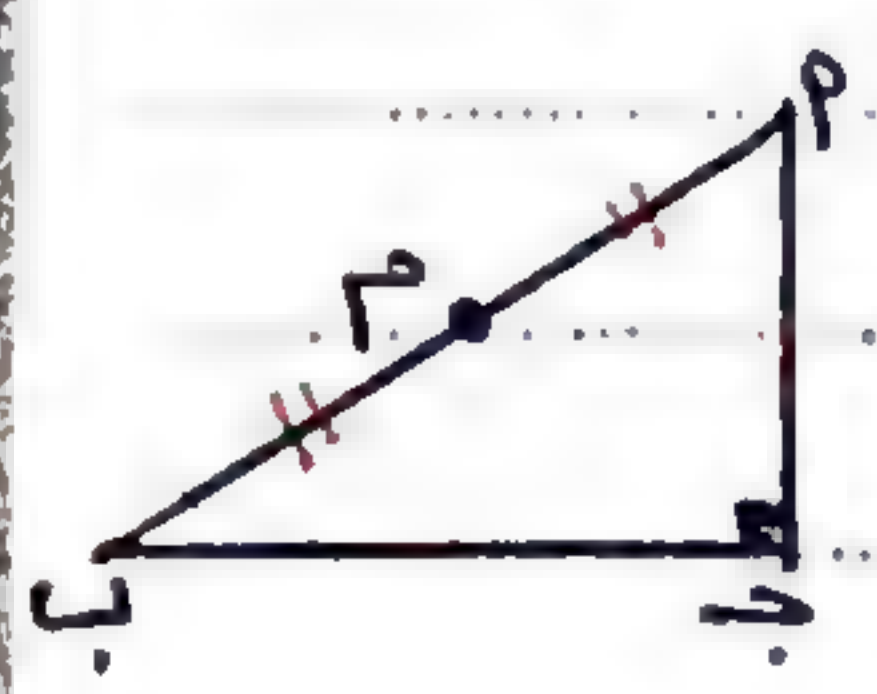
الحل

ميل $\overline{AB} = \frac{7-1}{8-0} = \frac{3}{4}$

ميل $\overline{BC} = \frac{7-0}{1-8} = \frac{7}{-7}$ (غير معروف)

ميل $\overline{AC} = \frac{0-1}{8-0} = \frac{-1}{8}$

∴ ميل \overline{BC} غير معروف ∴ \overline{BC} يوازي محور ص
∴ ميل \overline{AC} يساوي صفر ∴ \overline{AC} يوازي محور س
ومنها $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ∴ المثلث قائم كج ج



∴ $M =$ منتصف الوتر $AB = \left(\frac{0+8}{2}, \frac{8+0}{2} \right) = (4, 4)$

∴ نصف $AB = \frac{1}{2} \sqrt{(8-0)^2 + (0-8)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{64+64} = \frac{1}{2} \sqrt{128} = 4\sqrt{2}$

\therefore وحيات

$\# \dots (س-١٤) + (ص-٣) = ٢٥$

٣٤) اوجد قيم h التي تجعل كلاً مما

يأتى معادلة دائرية :

$s^2 + ص^2 - ٤س - ٢ص = ٠$

الحل

$3 = (1/7 x ٦ - ١/7 x ٤) = (٦/7 - ٤/7) = 2/7$

∴ $ل = ١ \dots \dots \dots ٢ = ٤$

الشرط اللازم هو : $٠ < \dots$

$ل^2 + ل^2 - ج < ٠$

$١ + ١ - (٢ + هـ) < ٠$

$٠ < ٢ - هـ + ٢$

$هـ < ٣$

∴ $هـ \in [٣, \infty)$

$s^2 + ص^2 + ٢س - ٦ص - ٢هـ^2 = ٠$

$٠ = ٢ - ١٢هـ +$

الحل

$3 = (1/7 x ٦هـ - ١/7 x ٤هـ) = (6هـ/7 - 4هـ/7) = 2هـ/7$

$= (٣هـ - ٢هـ) = هـ$

∴ $ل = هـ \dots \dots \dots ٢ = ٣هـ$

الشرط اللازم هو : $٠ < \dots$

$ل^2 + ل^2 - ج < ٠$

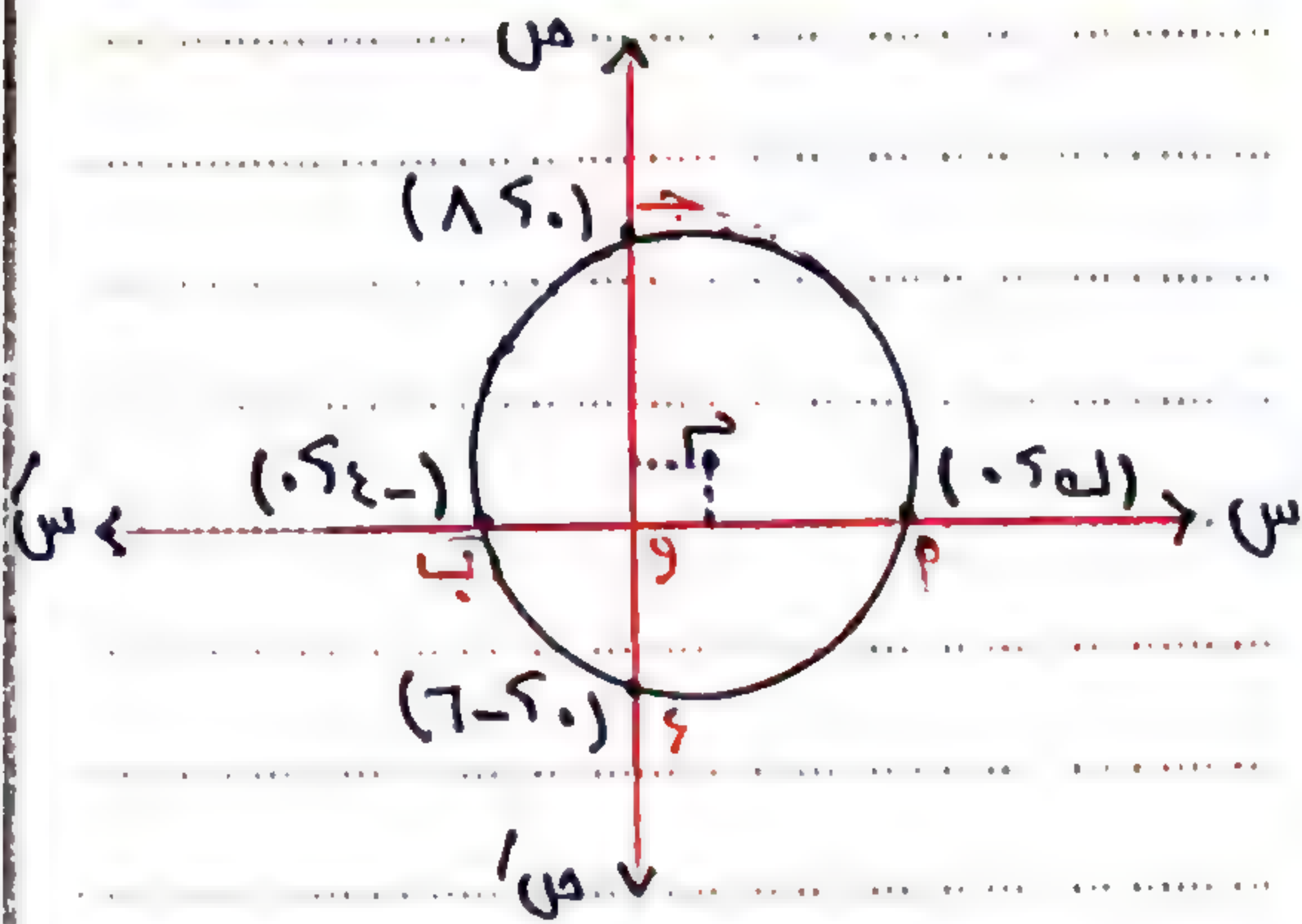
$هـ^2 + هـ^2 - (٣هـ^2 - ٢هـ^2 + ١٢هـ - ٦هـ) < ٠$

$هـ^2 + هـ^2 - ٣هـ^2 + ٢هـ^2 - ١٢هـ + ٦هـ < ٠$

$١٢هـ - ٢هـ^2 + ٣هـ < ٠$

$٤هـ^2 - ١٢هـ + ٣ < ٠$

(٣٧) في الشكل التالي أكتب معادلة الدائرة



الحل

فاك ا ب وتران متقاطعان داخل دائرة

$$و. ب \times و. ج = و. د \times و. هـ$$

$$ل. هـ \times ٤ = ٦ \times ٨ = ل. د \times ١٢$$

محتاجين احداثي المركز

منتصف (ب. د)

$$\therefore ل. د = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{-4+0}{2} \right) = (٣, -٢)$$

منتصف (ج. هـ)

$$\therefore ل. هـ = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{6+(-4)}{2} \right) = (٠, ١)$$

$$\therefore ل. د = (٣, -٢)$$

$$ل. هـ = \sqrt{(٣-٠)^2 + (-٢-١)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\therefore \# ٦٥ = \sqrt{(٣-٠)^2 + (-٢-١)^2} = \sqrt{18}$$

(٣٦) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف

قطر ها يساوي طول نصف قطر الدائرة التي

معادلتها:

$$س^2 + ص^2 - ٢س - ٤ص - ٨ = ٠$$

ومعادلتها مستقيمات يتقاطعان في نقطة

$$س + ص = ٠ \quad ٢س + ٤ص = ٨$$

الحل

$$٣ = (٢ - \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}ص) = ٢ - \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}ص$$

$$= (٢ - \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}ص)$$

$$\therefore ل = ٢ - \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}ص = ٢ - \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}ص$$

$$ل. هـ = \sqrt{(٢-٠)^2 + (٢-٠)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{(٢-٠)^2 + (٢-٠)^2} = \sqrt{8}$$

$$\therefore \# ٨ + ١ = ٩$$

$$= \sqrt{(٢-٠)^2 + (٢-٠)^2} = \sqrt{8}$$

$$\therefore \frac{س}{١} = \frac{٠-٢}{١-٢} = ٢ \quad \therefore ٢س - ٤ص = ٨$$

$$٢س + ٤ص = ٨$$

حل المعادلتين السابقتين:

$$\therefore س = ١ \quad ص = ١ \quad \therefore ل. د = (١, ١)$$

$$\# ٩ = \sqrt{(١-٠)^2 + (١-٠)^2} = \sqrt{2}$$

المعادلة تمثل دائرة بمس محور الصادات :

$$\therefore \text{نصفه} = 1 \quad \text{و} \quad 1 = \text{ح} \quad \text{و} \quad \text{ل} = 3$$

$$3 - 12 = 9$$

$$3,0 = 9 \leftarrow 7 = 12$$

المعادلة تمثل دائرة بمس المستقيم :

$$3^2 + 2^2 + 10 = 0$$

$$\therefore \text{نصفه} = \frac{|3^2 + 2^2 + 10|}{16 + 9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{نصفه} &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 5} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 5} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\sqrt{10 + 2 - 4 + 1 \times 3} = 5 - \text{ح}$$

$$\text{طبعا} \leftarrow \text{ح} = 3 - 12$$

$$3 = 3 + 12 - 5$$

$$3 = 12 - 8 \quad \text{بالترتيب}$$

$$\# \quad 3 = 12 - 8 \quad \therefore \quad 3 = 12 - 8$$

المقطر = 12 اسم

$$\therefore \text{نصفه} = 7 \text{ اسم} \leftarrow \text{نصفه} = 1^2 + 1^2 + 5 - \text{ح}$$

$$31,0 = 9 \quad \therefore \quad 3 + 12 - 2 + 1 = 19$$

٣٨) أوجد قيمة P في المعادلة :

$$3^2 + 2^2 - 12 + 10 = 0$$

فهم كل من الحالات الآتية :

المعادلة تمثل دائرة

الحل

$$(3-1) = \left(\frac{2}{1} \times \frac{1}{1}\right) = 3$$

$$\therefore 1 = 1 \quad \text{و} \quad 2 = 2$$

$$1^2 + 2^2 - 12 + 10 < 0$$

$$1 + 1 - 12 + 10 < 0$$

$$2 - 12 + 10 < 0$$

$$12 - 10 < 2$$

$$2 > 2 \quad \therefore [2, 12] \quad \therefore [2, 12]$$

المعادلة تمثل دائرة بمس نقطة الأصل :

$$\therefore \text{ح} = \text{صفر}$$

$$3 - 12 = 0$$

$$3 = 12 \quad \therefore \quad 1 = \frac{1}{3}$$

المعادلة تمثل دائرة بمس محور السينات :

$$\therefore \text{نصفه} = 1 \quad \text{و} \quad 1 = \text{ح} \quad \text{و} \quad \text{ل} = 3$$

$$\therefore 3 - 12 = 1$$

$$3 = 12 \leftarrow 2 = 12$$

٤٠ احسب قيمة له التي تجعل الدائم تكان

$$٣ : (س + ١٢) + (ص + ١١) = له$$

$$٢ : (س - ٣) + (ص - ١) = ١٦$$

متناسان

الحل

$$\text{مركز الأول} = (١١ - ٢) = ٩ \quad \text{بعض} = ١٦$$

$$\text{مركز الثانية} = (١٩ - ٣) = ١٦ \quad \text{بعض} = ٢$$

متناسان فقط يعني ممكن من الداخل
وممكن من الخارج

من الخارج :

$$\overline{٣} = ١٦ + ٩$$

$$\sqrt{١١ - ١ + ١٢ - ٢} = ٩ + ١٦$$

$$\therefore ١٦ + ٩ = ٢٥ \quad \text{بعض} = ٨١$$

من الداخل :

$$\overline{٣} = ١٦ - ٩$$

$$\sqrt{١١ - ١ + ١٢ - ٢} = ١٦ - ٩$$

$$\therefore ١٦ - ٩ = ٧ \quad \text{بعض} = ٢٨٩$$

٣٩ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين

$$(٣٩١) (٤ - ٢١٢) \text{ ومركزها يقع على}$$

محور السينات ؟

الحل

المركز يقع على محور السينات

$$\therefore س + ص + ٢ = ٠$$

$$\text{عند } (٣٩١) \leftarrow س = ١ \quad ص = ٣$$

$$\leftarrow ٢ + ١ = ٠ \quad \text{بعض} = ١$$

$$\text{عند } (٤ - ٢١٢) \leftarrow س = ٢ \quad ص = ٤$$

$$\leftarrow ٢ + ٤ = ٠ \quad \text{بعض} = ٢$$

حل المعادلات ١ و ٢ نجد أن

$$ل = ٥ \quad ص = ٠$$

$$\therefore س + ص - ١ = ٠ \quad \#$$

الصورة العامة

ممكن دخولها للصورة المباشرة عن

طريقة اكمال المربع :

$$(س - ٥) + (ص - ٢) = ٠$$

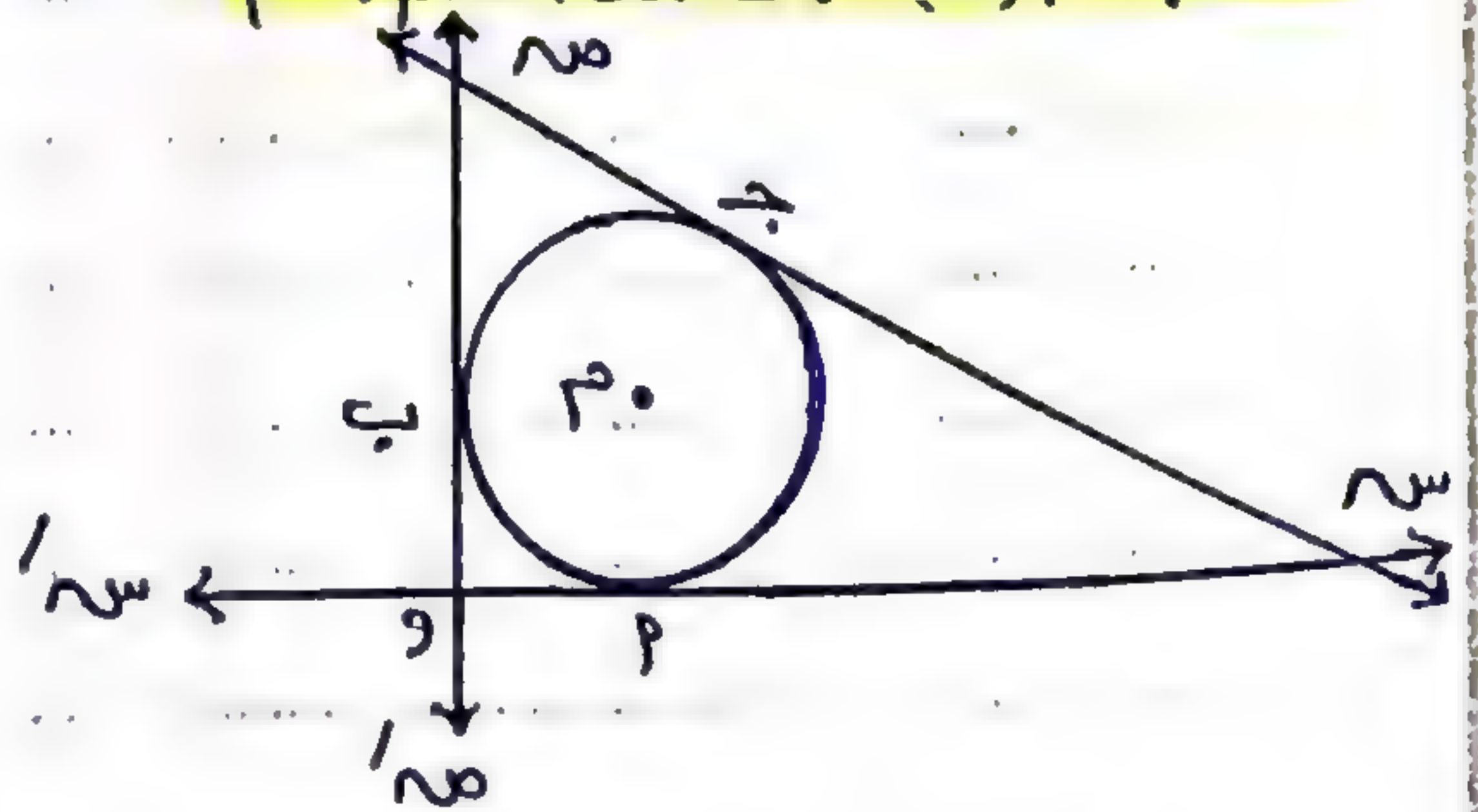
$$\therefore (س - ٥) + (ص - ٢) = ٠ \quad \#$$

٤٤) إذا قطع المستقيم من = ٢ الدائرة
 التي معادلتها (س-٣) + (ص-٢) = ٢٥
 فكانت مماساً للدائرة م عند
 ج. أوجد معادلة الدائرة م.
 الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ص} &= 2 \\ \therefore (س-3) + (2-2) &= 25 \\ (س-3) &= 25 \\ 3-س &= 25 \quad \text{أو} \quad 3-س = 0 \\ س &= 8 \quad \text{أو} \quad س = 3 \\ \therefore \text{ب} &= (2, 8) \quad \text{ك} = (3, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{(2-2)^2 + (8-2)^2} \right] &= \text{ب} \\ 10 &= \text{وحدة طول} \end{aligned}$$

٤٥) الدائرة م مماساً لمحور x والحدائق
 م ب فإذا كان المستقيم :
 $٤س + ٣ص - ١٢ = ٠$ مماساً للدائرة م عند
 ج. أوجد معادلة الدائرة م.



الحل

$$\begin{aligned} \text{م} &= (س, ص) \text{ حيث } [٥٢ \text{ و } ٤٠ \text{ مماسان م. و}] \\ \text{م ج} &= [٤٨ \text{ البعد العمودي}] \\ &= \frac{|٤س + ٣ص - ١٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}} \\ &= \frac{|٤س + ٣ص - ١٢|}{٥} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥ &= |٧ص - ١٢| \\ \leftarrow ٧ص - ١٢ &= ٥ \quad \therefore ٧ص = ١٧ \\ \therefore (س-٦) + (٦-٧) &= ٣٦ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow ٧ص - ١٢ &= -٥ \quad \therefore ٧ص = ٧ \\ \therefore (س-١) + (١-١) &= ١ \end{aligned}$$

٤٤) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالمقطع
 م (٣٩١) ٢ ب (٤-٥٢) ويقع مركزها
 على محور السينات ؟

الحل

∴ المركز يقع على محور السينات

$$∴ س^2 + ص^2 + ٢٢س + ج = ٠$$

$$\text{ومنها} \leftarrow م = (-١٠, ٠)$$

$$\leftarrow \text{عند م (٣٩١) ٢}$$

$$١ + ٩ + ٢٢ + ج = ٠$$

$$٢٢ + ج = -١٠ \leftarrow ①$$

$$\leftarrow \text{عند ب (٤-٥٢)}$$

$$٤ + ١٦ + ٤٠ + ج = ٠$$

$$٤٠ + ج = -٢٠ \leftarrow ②$$

بطرح المعادلتان ① - ② نتج

$$٢٠ = ٤٠ \leftarrow ٥ = ٠$$

نفرض كم المعادلة ①

$$٢٢س + ص^2 + ٢٠ = ٠ \leftarrow ١٠ = -٢٢س$$

المعادلة هي :

$$س^2 + ص^2 - ١٠س = ٠ \quad \#$$

٤٣) اذا كانت :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

تمثل معادلة دائرة فان طول نصف

قطرها يساوي وحدة طول ؟

الحل

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

لمصفوفة مصغرية

$$∴ (س^2 + ص^2 - ١٠س) = (٠)$$

$$س^2 + ص^2 = ١٠$$

$$\# \text{ نصف } = \sqrt{١٠} = ١٠ \text{ وحدة طول}$$

٤٥) اذا كانت معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل

هكذا:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$$

$$+ ج - ٢ = صفر$$

فان طول نصف قطرها = وحدة طول

الحل

:- المعادلة السابقة معادلة دائرة

$$\therefore \text{معامل } x^2 = \text{معامل } y^2 = 1 \quad \therefore \text{معامل } x = 2$$

$$\therefore \leftarrow 2 = 2 \quad \therefore 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore 2 = 2$$

:- المعادلة السابقة للدائرة تمر بنقطة الأصل

$$\therefore ج - ٢ = ٠ \quad \therefore ج = ٢$$

فتكون معادلة الدائرة هكذا:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \quad (\div 2)$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$$

ومن هنا نطلع بالآتي:

$$r^2 = (1 + 1 - 8) = -6$$

$$\therefore \text{مع } r^2 = 1 + 1 - 8 = -6 \quad \therefore \text{وحدة طول}$$

٤٦) اذا كانت:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$$

تمثل معادلة دائرة فان: =

الحل

$$r^2 = \left(\frac{1}{2} \times 2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times 2 \right)^2 - 8$$

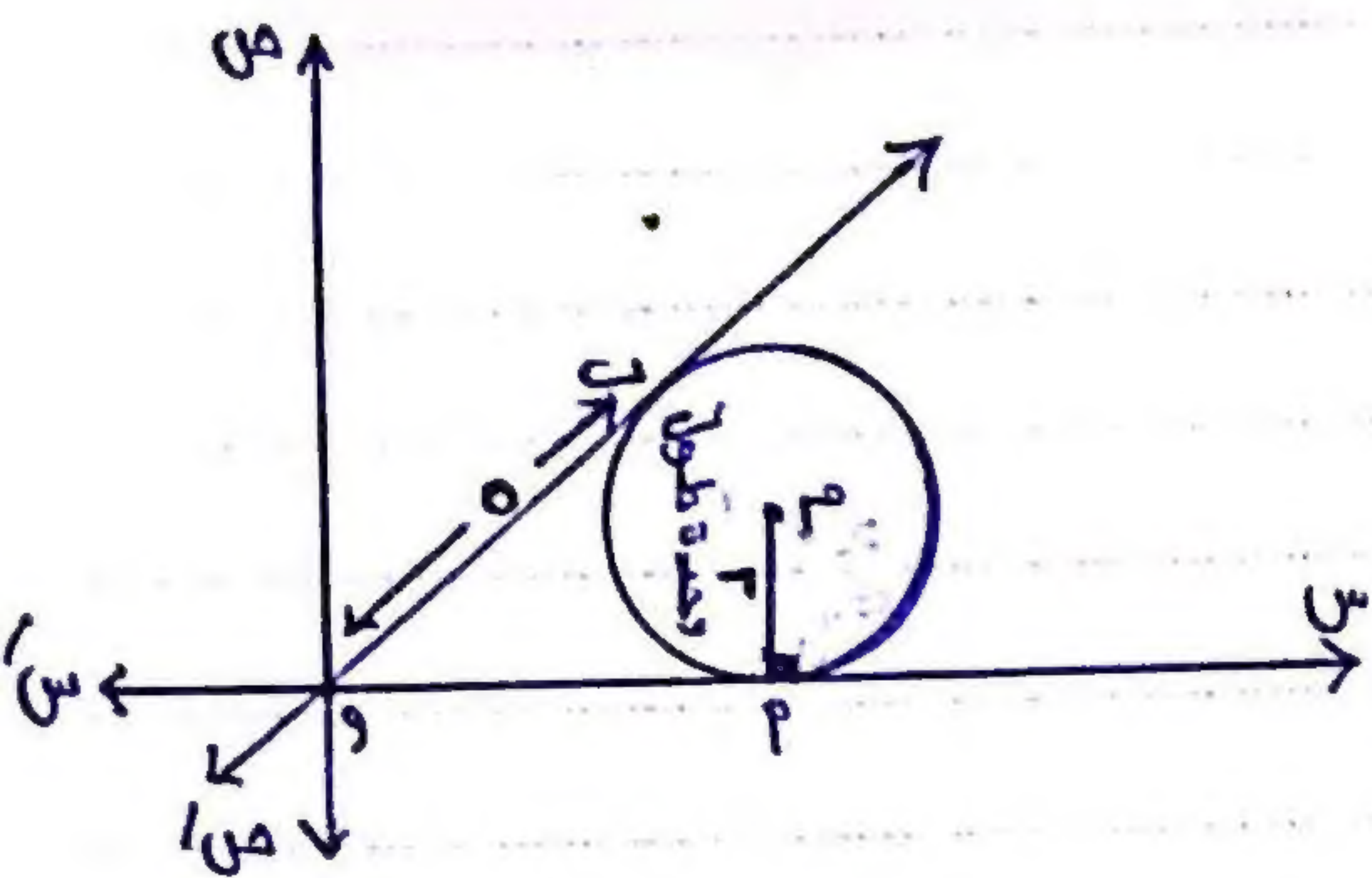
$$= (1 + 1 - 8) = -6$$

$$\therefore \text{مع } r^2 = (-6) + (-6) = -12$$

$$r^2 = 1 + 1 - 8 = -6$$

$$r^2 = 1 + 1 - 8 = -6 \quad \therefore \text{وحدة طول}$$

٤٨) كم الشكل التالي: انا كاني وب = ٥ وحدة طول اوجد معادلة الدائرة م.



الحل

∴ وب قطعتان متساويتان من و

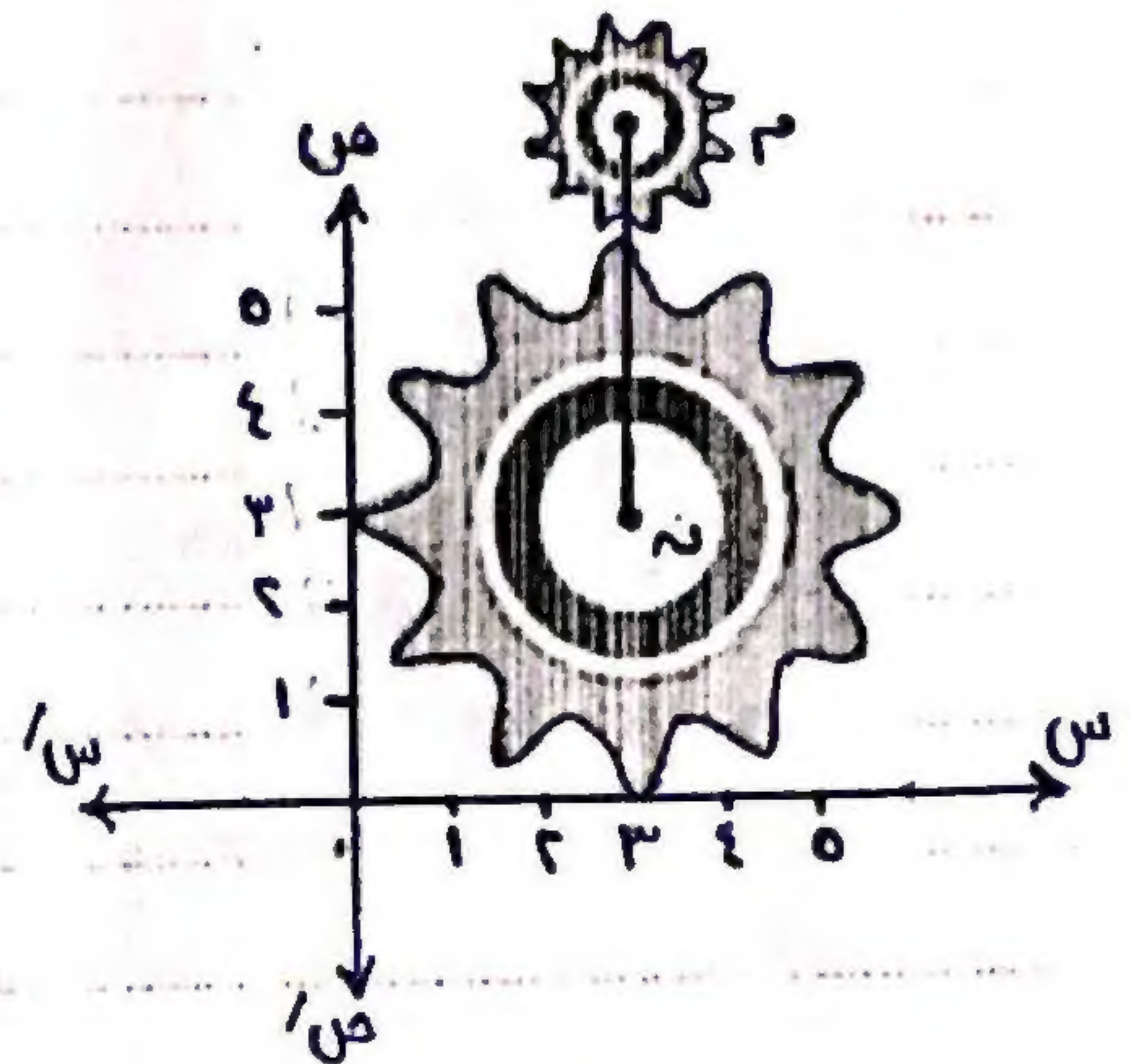
∴ و = ٢ وب = ٥ وحدة طول

$$\therefore م = (٢٥٥)$$

← معادلة الدائرة هكذا:

$$\# (٥ - س) + (٢ - ص) = ٤$$

٤٧) الشكل التالي يمثل ترس في آلة مركزها م_٢ ، م_٣ // محور الصادات فاذا كانت نصف قطر الترس الأصغر = $\frac{1}{3}$ نصف قطر الترس الأكبر اوجد معادلة الترس الأصغر؟



الحل

∴ نصف (البكر) = ٣ وحدة طول

∴ نصف (للمصغر) = $\frac{1}{3} \times ٣ = ١$ وحدة طول

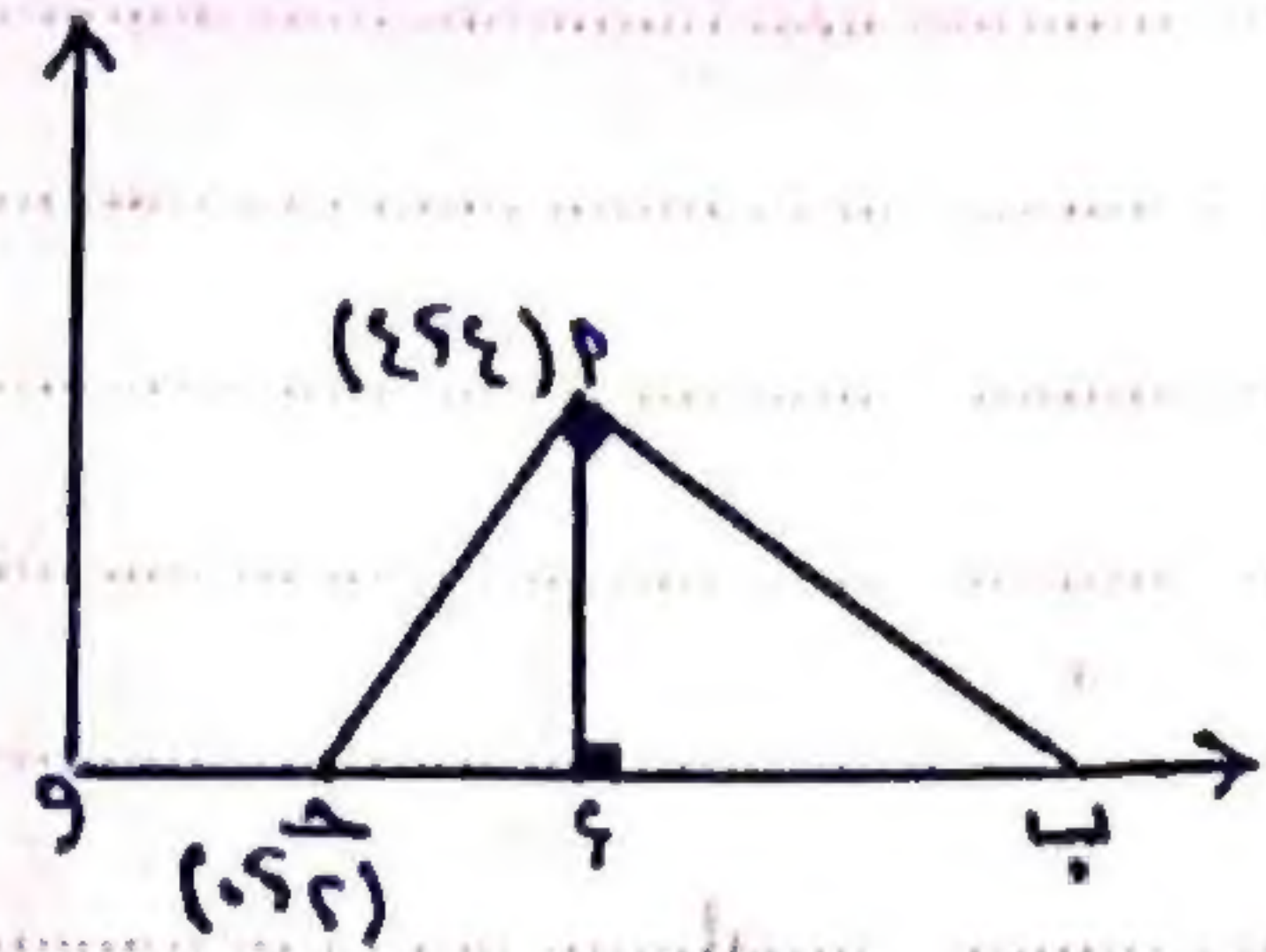
∴ إحداثيات النقطة م = (٧٥٣)

← معادلة الدائرة الصغرى هكذا:

$$\# (٣ - س) + (٧ - ص) = ١$$

٤٩) كم الشكل التالي:

أوجد الصورة المباشرة لمعادلة الدائرة
التي تمر بـ $و(٥, ٢)$ بـ ج ؟



الحل

$$\because (٤, ٤) = م \text{ و } (٥, ٢) = ج$$

$$\therefore ٤ = ٢ \text{ وحدات طول}$$

$$٥ \text{ و } ج = ٤ = ٢ \text{ وحدة طول}$$

٥ بـ ج من نظرية اقليدس

$$(٤, ٤) = م \text{ و } (٥, ٢) = ج$$

$$١٦ = ٤ \times ٤ \text{ و } ٨ = ٤ \text{ وحدة طول}$$

وبالتالي فإن إحداثي ب يساوي (٥, ١٢)

وكذلك للـ ب نفس بـ ج = ١٠ وحدة طول

$$\text{بـ مركز الدائرة } م = (٥, ٧) = (٥, ٢ + ٥)$$

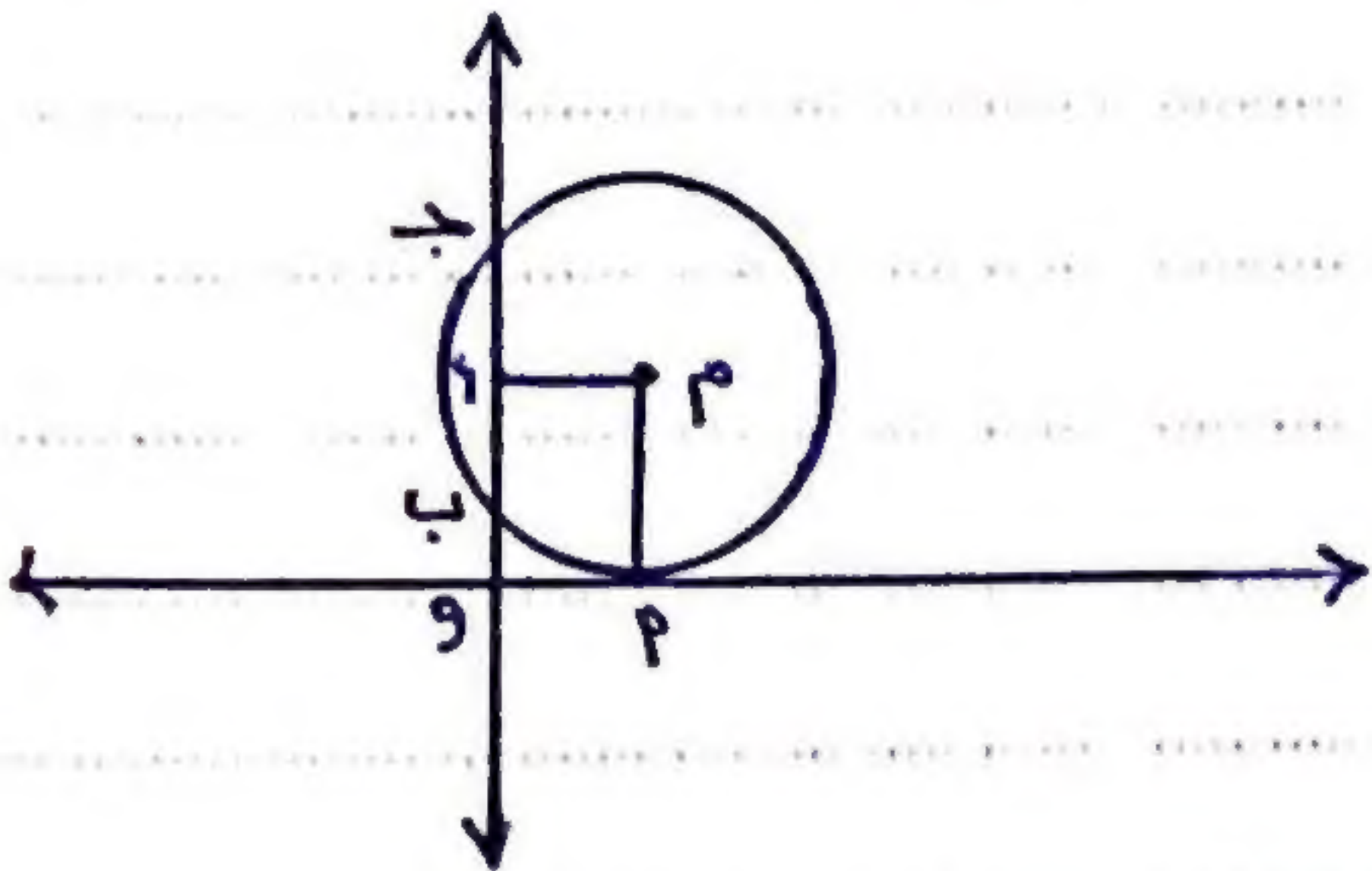
$$\text{بـ نصف } = \frac{١}{٢} (٤ - ٥) = \frac{١}{٢} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

بـ الصورة المباشرة:

$$\# (٧ - ٥) + (٥ - ٥) = ٢٥$$

٥٠) كم الشكل التالي:

إذا كان $ب = ٣$ و $ج = ٥$ و $م = ٥$
أوجد معادلة الدائرة:



الحل

من تطبيقات التشابه كم الدائرة:

$$(٤, ٥) = م \text{ و } ب = ٣$$

$$١٦ = (٦ + ٢) \times ٢ =$$

$$\therefore ٤ = م$$

$$\text{بـ } ٤ = م \text{ و } ٤ = ب \text{ فتمصف بـ ج}$$

$$\therefore ٤ = ب = ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣$$

$$\therefore ٤ = ٢ + ٢ = ٥ = م$$

بـ تقدر الوقت بجيب المركز

$$\therefore م = (٥, ٤)$$

بـ الدائرة لمس محور السينات

$$\therefore ٥ = |٥| = م$$

بـ المعادلة هكذا:

$$\# (٥ - ٥) + (٥ - ٥) = ٢٥$$